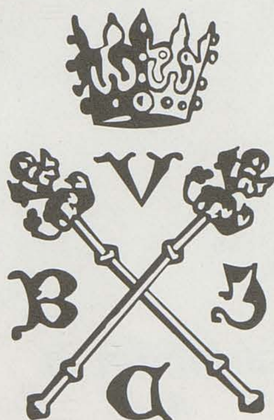

V
B J
C

RACHUNKU ALGEBRAICZNEGO

TEORYA

Przystósowaná do linii krzywych

Przez

Iána Sniadeckiego w Szkole Główney Koronney Matematyki wyższey i Astronomii Professora, teyże Szkoły Sekretárza.

TOM II.

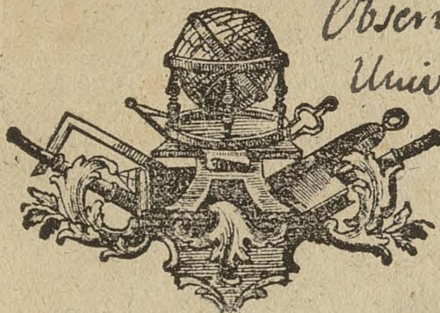
w którym się przez zrównaniá nieoznaczone tłómaczą włásności Linii i powierzchni krzywych;

Zamyká siedm Táblic s Figurami.
Cena dwóch Tomów - - Zł. 12.

Znayduią się do przedaniá { w Krakowie w Drukarni Szkoły Głó- wney Koronney. w Warszawie u II. XX. Piárów.

Observatorii Astronomiae Universitatis Cracoviensis

Donum authoris



w KRAKOWIE

---

w Drukarni Szkoły Głowney Koronney Roku 1783.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Ilości i funkcye w zrównanie iakiégokolwiek ſtopnia wchodzącé wyráżaią ſię przez linie geometryczné: z różnych odmián tym ilościom lub funkcyom nadanych, tłómaczą ſię odmiany, któré odpowiadaią liniom.

§. I.

Przéyście z Algebry do Geometryi.

Zadaiąc ſobie iakié pytanie w piérwſzym Tomie, potrafiliśmy wſzyſtkié okoliczności i warunki do niego przywiązané w zrównaniu zamknąć. Rozwiązáwſzy potém to zrównanie, a maiąc przytomné na umyśle znaczeniá nadané wyrazom i znakom użytym, odkrywaliśmy práwdy, którycheśmy ſię czaſém ani ſpodziéwali, ani ié nawet ſądzili za związkowé s tém, czegośmy ſzukali. Iedno zrównanie dobrze obięté umyſłém, ſtało nám ſię xiążką do czytaniá nowych między ilościami związków. To ieſzcze przerobioné w poſtać prościéyſzą, lub złączoné zręcznie z innémi, pokazywało nám nowé práwdy i ſtóſunki, tak dalece, iż będąc ſzczęśliwym w kombinowaniu, zrównanie w ręku biegłego Analiſty ſtaie ſię ſkładém náyſkrytſzych práwd związkowych rozrzuconych po náturze. S tąd powinniśmy ſię przekonać, iż wſzyſtkié włáſności iakiéykolwiek ilości, wſzyſtkié kondycye do niéy przywiązané, byleby nie były między ſobą przeciwné, wyrazić można przez Algebraiczné zrównanie. Idzie tylko o dwie rzeczy, naprzód: aby ilość przedſiewzięta nie była nad to zawikłaná dlá uwág geometrycznych; powtóre: aby doſtrzéc związku zachodzącégo między okolicznościami zadaniá: częſtokroć niedoſtatek tamtéy kondycyi zaſłaniá przed rozumém naſzym tén oſtatni śrzodek wynalezieniá tego, cośmy ſobie zadali.

Linie Geómetryczné ſą ilościami barzo proſtémi; wſzyſtkié więc ich włáſności możémy wyrazić w

 zrównaniu

zrównaniu algebraiczném. Wſzakże Geometryá początkowá porównywá iedné figury z drugiémi, s porównywaniá rodzi ſię zrównanie, które zawiérá w krótkości té związki, któréśmy między figurami zważali. Kombinacya tych związków z innémi, odkrywá nowé inné, a té znowu oſtatnié odſlaniaią świéżé práwdy wypádaiącé s piérwſzych: tak dalece, iż przerábiaiąc, wiążąc własności linii, figur, i ciał geometrycznych, przyſzlibyśmy do wyrażeniá wſzyſtkich práwd geometryi elementarnéy przez znaki ogólné, gdyby to nie było z większym dlá rozumu naſzégo pożytkiem zoſtawić tak proſté ſtóſunki ſamému działaniu duſzy, a rozumowanie przez znaki ſymboliczné zawikléyſzym związkom i dociekaniom zachować. Zgádzámy ſię więc s całą rzeſzą gorliwych o ćwiczenie rozumu ludzkiégo Geometrów, że ſpoſoby uważaniá, dowodzeniá i porównywaniá ilości rościągłéy, w barzo gruntowném i ściſłém świetle podané od ſtarożytności należy przy ſwéy całości w geometryi początkowéy utrzymać. Ale chcąc naſzé kombinacye do odległéyſzéy ogólności wynieść, przedrzyć ſię w ſtraſznie zawikłané Figur trudniéyſzych związki, które w ſtarożytności ſamym tylko extraordynaryinym były doſtępné rozumom, chcąc ułatwić niezmiernie zawaloną drogę dociekań w głębſzéy geometryi, i uczynić ſobie náywyżſzé práwdy doſtępniéyſzémi; trzeba było koniecznie weſprzéć rozum ludzki ogólnémi znakami, natrafić na ſzczęśliwą zręczność ſtóſowaniá rachunku do Figur. Tę przyſługę winniśmy nieśmiertelnéy przenikłości *Des-Carta* która ſtała ſię razém zrzodłem rozległéy ſławy dlá ſwégo wynalázcy, i náyſzczęśliwſzych dociekań dlá iego naſtępców. Zapomniymy na moment o ſpoſobie *Des-Carta*, abyśmy ſię ſami poſtawili w okoliczności piérwſzych wynalázców.

Chcąc znaczeniá algebraiczné do geometryi przenieść, roſtrząſnąć nám należy wſzyſtkié wyrazy w ſkład zrównaniá wchodzącé, i ſzukać im odpowiada-

iących

iących w geometryi znaków. Zważaliśmy w algebrze różnego rodzaiu funkcye, s tych powstaiące różnych stopni i gatunków zrównaniá. W funkcyach náprzód różniliśmy zawsze ilości znané od nieznanych: teráz chcąc rosszerzyć daléy tén podział dlá tego, że náypierwszą iest w geometryi rzeczą porównywanie między sobą ilości, włożémy na mieysce znanych i nieznanych, ilości stateczné i odmienné, które iako wiémy też samé maią znaki. Wziąwszy więc linią prostą pewnéy iakiéy nieodmiennéy wielkości, możémy przez nię reprezentować iakąkolwiek ilość stateczną: ilości zaś odmienné wyrażémy barzo dobrze przez linią nieoznaczoną *RS*. od któréy taką możémy odciąć cząstkę, iaká nám się tylko podobá, a zatém iako n. p. *x* może zawiérać wszystkié iakiékolwiek oznaczoné wártości, tak liniá *RS*, wyrážać może wszystkié iakiékolwiek podziáły. Takowé podziáły nazywać będziémy ODCINKAMI (*Abscissae*), które będą wyrážać pewné oznaczoné wártości ilości odmiennéy *x*. Aże linia *RS* nie má żadnéy określonéy wielkości, ucinki takowé brać się mogą od *A* na obydwie strony. Mieysce *A* nazywać będziémy POCZĄTKIEM ODCINKÓW (*Initium Abscissarum*): odcinki zaś z iednéy strony *A* brać będziémy za *dodatné*, a z drugiéy strony za *odiemné*. Iako mieysce *A*, tak strona odcinków dodatnych zależy od upodobaniá, byleby obráwszy iednę stronę za dodatną, drugą iéy przeciwną wziąść za stronę odcinków odiemnych.

Znaczeniá algebraiczné wyłożoné w liniach geometrycznych.

Figurá 1.

Odmiéniwszy funkcyą na zrównanie w któréyby nie było tylko *x* i ilości stateczné, *x* przestaie bydź ilością odmienną. Chcąc więc dochować *x* właśności odmiennéy, potrzeba koniecznie w zrównaniu miéć dwié ilości odmienné *x*,*y*; tak, żeby pewná funkcyá *x*, była równą pewnéy funkcyi *y*. W tén czás bowiem obydwié zostaną się przy swym charakterze odmienności iako wiémy s teoryi pytáń nieoznaczonych. Tu otwiérá nám się niezmierné pole docie-

káń, ilé bowiem wymyślić ſię może gatunków funkcyi x, y, tylé nám wypadnie kombinacyi. Każdá s tych kombinacyi będzie zrzódłém nowych związków między ilościami, którym odpowiadaią nowé w geometryi znaczeniá. Idzie tylko o ſpoſób wyrażeniá tych znaczéń; zacznîymy od náyproſcieyſzych. Ieżeli y będzie pewną funkcyą x; każdéy wártości x, powinna odpowiadać pewná wártość na y. Wyrażémy tę wártość przez linią proſtą poſtawioną na ucinkach linii RS, tak n.p. że ieżeli $x{=}AP$, y będzie miało wártość wyrażoną przez PM; ieżeli $x{=}AQ$, $y{=}QN$, ieżeli $x{=}o$, $y{=}AB$. takowé linie AB, PM; i t.d. odpowiadaiącé wártościom pewnym odcinków nazywać zawſze będziémy PRZYSTAWAMI (*Applicatae, ordinatae*); które będą równo-ległé linii proſtéy AB, uważaiąc ią przeciągnioną na obydwié ſtrony RS, do iakiéykolwiek bądź wielkości. Takowá liniá będzie znowu linią przyſtáw; a iako pewné wielkości przyſtáw odpowiadaią pewnéy wártości odcinków z zrównaniá wyciągnionych, ſtawiané bydź powinny na tych mieyſcach linii RS, gdzie ſię kończą wártości nadané x. Ieżeli na y wypádać będą wártości dodatné, té będziémy kłáśdź nad linią RS: ieżeli zaś odiemné, té położémy pod linią AS. Może ſię zaś przytrafić, że odcinkom dodatnym będą odpowiadać przyſtawy dodatné albo przyſtawy odiemné: powtóré odcinki będąc odiemné, przyſtawy wypadną odiemné albo dodatné. W pierwſzym razie położémy ié nad AS, w drugim pod AS, w trzecim pod AR, a w czwártym nad AR, tak że n.p. PM ieſt przyſtawą dodatną, rb przyſtawą odiemną, należącé obydwié do odcinków dodatnych: przeciwnie rn ieſt przyſtawą dodatną, a pm przyſtawą odiemną odpowiadaiącé obydwie odcinkom odiemnym.

Nie potrzeba nám ſię o tém oſtrzégać, że ilość większá lub mnieyſzá przyſtáw AB, PM, QN, i t.d. zawiſla od funkcyi y. Rzecz bowiem oczywiſtá że zrównanie zawiéraiącé związek między x, y, zawiéra razem

rá razém ſtóſunek między odcinkami i przyſtawami, które odtąd razém brané nazywąć będziémy WSPÓŁ-USZYKOWANEMI (*Coordinatae*), tén ſtóſunek ieſt prawém, podług którégo układaią ſię wártości przyſtáw z wártości odcinków tak, że ich wzroſt lub ubywanie, ieſt zawſze iednoſtaynym wypádkiém pewnégo między x, y prawa w zrównaniu zawartégo. Ciągnąc podług takowégo prawa ſzereg przyſtáw odpowiadaiący ſzeregowi odcinków, a ścigaiąc punkt B, widzémy, że on przenoſząc ſię na różné miéyſca, zoſtawiá po ſobie ślád nowéy linii proſtéy lub krzywéy, któréy natura i poſtać zawiſła od związku między x, y: i tak przypuśćmy że liniá proſtá na figurze 2. lub linia krzywa na figurze 3. ieſt odryſowaná podług zrównaniá piérwſzégo ſtopnia między dwiema odmiennémi x, y; w tém zrównaniu odmiéniaiąc x, czyli AP, odmiéniać ſię będzie y, czyli PM; i idąc po wſzyſtkich punktach linii RS, począwſzy od A, znáydziémy przyſtawy tym odcinkom odpowiadaiącé i naznaczaiącé mieyſce, przez któré liniá proſtá BMN, lub krzywá EBM, przechodzi: właśnie iak gdyby punkt B, ruſzywſzy ſię ſzedł do M, prowadzony przez przyſtawę PM, odmiéniaiąc na każdym miéyſcu ſwoié kierowanie tak, iak PM, ſwoię wielkość odmienia; w tym biegu opiſze punkt B linią proſtą lub krzywą BM, odmiéniaiąc ſwoié położenie podług prawa zamkniętégo w zrównaniu, którém ſię związek wſpół-uſzykowanych, w nim zaś natura linii krzywéy wyráżá. Widzémy więc że uwági naſzé zgadzaią ſię zupełnie s ſpoſobém dáwnych Geometrów, którzy ſobie wyſtawiali linie krzywé, iako opiſané biegiém punktu w każdym momencie ſwé położenie odmieniaiącégo; lubo uwági naſzé daleko ſą prościéyſzé i ogólniéyſzé, iak ſię niżéy przekonámy. Figura 2. 3.

Każdy piérwiáſtek zrównaniá wyráżaiącégo linią EBM, daie nám iedén punkt linii krzywéy, bo nám daie miéyſce, w którém przyſtawa tęż linią krzywą przecina: aże zrównanie piérwſzégo ſtopnia, podług

którégo wyſtawiliśmy ſobie linią *EBM* odryſowaną, powinno koniecznie miéć iedén piérwiáſtek rzetelny; nie może bydź żádnéy wártości na x, któréyby nie odpowiadała wártość na y; przeto na linii *RS*, niemaſz żádnégo miéyſca, s. którégoby wyſtawioná przyſtawa nie przecinała linii krzywéy: a iako x naznacząc możémy nieſkończoną liczbę wártości, tak będzie nieſkończona liczbá przyſtáw idących i przecinaiących ráz linią krzywą; to ieſt *PM*, odmiéniaiąc ſwoię wielkość póydzie po linii *RS* w nieſkończoną odległość, i linia krzywa rosciągnie ſwóy łuk bez końca, który nazywać będziémy Odnogą nieskonczoną linii krzywéy (*Ramus curvae infinitus*), rosciągnie ſię zaś bez końca na dwié ſtrony, to ieſt na ſtronę *AR* i na ſtronę *AS*, gdyż za x, możémy kłaśdź wártości dodatné i odiemné. Ieżeli na wſzyſtkié wártości dodatné x, będą wypádać przyſtawy dodatné; cała odnoga nieſkończoná linii krzywéy będzie leżyć nad linią *AS*: ieżeli zaś na wſzyſtkié wártości dodatné x, wypádać będą przyſtawy odiemné, ponieważ ułożyliśmy ié ſtawiać pod *AS*; cała odnoga linii krzywéy będzie leżyć pod *AS*. Ieżeli zaś na odcinki dodatné x, wypádać będą wártości na y, náprzód dodatné a potém odiemné; ponieważ podług §. XVI. Algebry nie może $+y$ ſtać ſię $-y$, póki wprzód nie ſtanie ſię $y=o$, więc będzie między wártościami $+x$, iedna, która uczyni $y=o$, i w tém miéyſcu liniá krzywá przetnie oś, iak n. p. w miéyſcu *O*, á przéſzedłſzy pod nię rosciągnie ſię bez końca, ieżeli iuż odtąd na $+x$, będą bez końca wypádać przyſtawy odiemné: ieżeli zaś znowu po pewnéy liczbie wártości, $-y$ ſtanie ſię $+y$, więc znowu liniá krzywá przetnie drugi ráz oś, i przenieſie ſię nad linią *RS*. To cośmy mówili o wártościach $+x$ ſłuży także na $-x$, to ieſt: że ieżeli z $-x$, wypádać zawſzę będą y dodatné; cała odnoga nieſkończoná linii krzywéy leżyć będzie nad *AR*; będzie zaś leżyć pod *AR*, ieżeli $-x$ uczyni wſzyſtkié y odiemné: ieżeli nakoniec $-x$, czynić bę-

dzie

dzie *y* czasém dodátné, a czasém odiemné, liniá krzywá przecinaiąc oś, przenosić się będzie, ráz nad, a drugi ráz pod *AR*. Té wszystkié własności wyciągnyliśmy z uwág nad zrównaniém stósowanych do znaczeń geometrycznych: inné iakiékolwiek zrównaniá podobnie rostrząsaiąc wyciągniémy z nich różnégo rodzaiu, i różnéy figury linie krzywé. Przeto każdé zrównanie między dwiéma iakiémikolwiek odmiennémi ilościami, uważać możémy, iako wyrażaiącé naturę pewnéy linii prostéy lub krzywéy przywiązanéy do prawa między współ-uszykowanémi w zrównaniu zamkniętégo: i znowu przeciwnie każdą linią geometryczną prostą lub krzywą odrysowaną podług iakiégo prawa, zważać możémy iako wyráz graficzny pewnégo zrównaniá takowé prawo zamykaiącégo. Ieżeli cáłá liniá odrysowaná iést podług iednégo prawa, albo co na iedno wyńdzie podług tegóż samégo zrównaniá, nazywá się linią Ciągłą (*Continua*), a prawo iéy naturę wyrażaiącé nazywá się Prawem ciągłości (*Lex continuitatis*); ieżeli zaś liniá iest tak odrysowaną, że iéy porcye należą do różnych zrównań, iáką bydź może liniá za posunieniém piora odryta, złożoná z ułomków częścią prostych, częścią krzywych, takowá liniá zowie się Różno-ciągłą, nieforemną (*Discontinua, irregularis*). Wszystkié linie, które w geometryi uważać się zwykły, są ciągłémi, odrytémi podług prawa ciągłości w zrównaniu wyrażonégo, tak n.p. liniá krzywá na figurze 3. *mEBMO*, iést linią ciągłą, ieżeli w niéy każdá przystawa iest funkcyą tąż samą odcinku wyrażoną przez iakié zrównanie. Prawda że J. P. Euler náypiérwszy wprowadził do geometryi linie nawet nieforemné, co wiele narobiło między Geometrami sprzéczki, ale to ieszcze nie czas dlá nás o tym mówić. Dosyć nám teráz wiedzieć, że wszystkié linie, które będą przedmiotami naszéy uwagi w ciągu teraźniéyszéy nauki będą ciągłémi. Linią *RS*, na któréy się rachuią odcinki nazywać będziémy Osią albo

KIEROWNICĄ (*Axis*, *Directrix*). Mówiąc o odcinkach i przyſtawach razém, ułożyliśmy ſobie nazywać ie wſpół-uſzykowanémi: ieżeli przyſtawy będą ſtać proſto-padle na osi czyniąc kąt proſty z odcinkami, nazywać ie będziémy WSPÓŁ-USZYKOWANEMI PIONOWEMI (*Coordinatae orthogonales*, *normales*), ieżeli zaś ſtać będą pochyło czyniąc kąt ukośny, nazwiémy ie UKOŚNEMI (*Coordinatae obliquangulae*).

S tych ogólnych uwág wypádá tén ſám podział linii, na któryśmy rozebrali funkcye w piérwſzym Tomie. Ieżeli y będzie takową funkcyą x, którą można w zrównaniu algebraiczném zupełnie zawrzéć; linią takowém zrównaniém oznaczoná zwać ſię będzie ALGEBRAICZNĄ (*Curva Algebraica*). Ieżeli zaś y będzie funkcyą x taką, iż iéy piérwiáſtków i wártości niepodobná ieſt w zrównaniu ogarnąć, nazwiémy ią PRZESTĘPNĄ (*Curva Tranſcendens*). Piérwſzy rodzáy nazywaią niektórzy GEOMETRYCZNYM, oſtatni MECHANICZNYM. (*Curvae Geometricae*, *Mechanicae*). Tén atoli ogólny linii podział, zawiérać w ſobie będzie ſzczególniéyſzé rozłożenia, wypádaiącé s podziáłu zrównań i funkcyi co do wymiárów, i co do liczby ilości odmiennych.

§. II.

Włáſności linii krzywych wyciągnioné z natury zrównań.

Wniydźmy iuż w ſzczególniéyſzé rozbiory linii, i zrównań. Zważaliśmy w piérwſzéy Części funkcye wyráżaiącé iednę tylko lub kilka na raz wártości ilości odmienney; to ieſt: że y może bydź taką funkcyą x, iż iéy albo iedna tylko, albo kilka na ráz odpowiadá wártości, podług znaku piérwiáſtkówégo położonégo przed y: wiémy bowiem że znaki piérwiáſtkowé wyrážaiąc kilka na ráz wártości ſą wątpliwémi. Nazwaliśmy takowé funkcye z J. P. Eulerem IEDNO-KSZTAŁTNE, DWÓ-KSZTAŁTNE, KILKO-KSZTAŁTNE, (*Functiones Uniformes*, *Biformes*, *Multiformes*), podług wykładnika znaku piérwiáſtkowégo którym ieſt naznaczoné y: a w znaczeniu Geometryczném wypádá, że ieżeli y będzie funkcyą iednókſztáłtną

kſztáłtną x, na tén czás każdému odcinkowi x, iedna tylko będzie odpowiadać przyſtawa: biorąc zą x wſzyſtkié wártości dodatné i odiemné od o aż do $\pm\frac{1}{o}$, otrzymámy tyléż przyſtáw; zatém liniá krzywá takowém zrównaniém wyrażoná rosciągnie ſię bez końca na obydwie ſtrony osi RS: taką linią reprezentować może (Fig. 3). włáſność zaś ta ſłużyć będzie ogólnie wſzyſtkim liniom, których zrównaniá nie będą zawiérać żádnégo znaku piérwiáſtkowégo, iakośmy to iuż w §. 1. obſzérnie wyłożyli.

Ieżeli zaś y będzie funkcyą dwó-kſztáłtną x, iaką zamyká zrównanie $y^2=2Py-Q$, czyli $y=P\pm\sqrt{(P^2-Q)}$ gdzie P i Q ſą funkcyami iednó-kſztałtnémi x; na tén czás każdéy wártości x będą odpowiadać dwie przyſtawy, obydwie rzetelné ieżeli $P^2>Q$; lub obydwie uroioné, ieżeli $P^2<Q$: tak n.p. biorąc $x=+AP$, otrzymámy na y PM, PM; znowu $x=-AP$, będzie $y=Pm$, Pm; ieżeli $P^2>Q$ linia krzywa takowém zrównaniém opiſaná będzie przechodzić przez té przyſtawy; ieżeli zaś $P^2<Q$ liniá tamtędy nie przéydzie. Ale będąc $P^2>Q$, nie może ſię odmiénić na $P^2<Q$ póki wprzód nie przéydzie przez śrzodkuiący ſtán $P^2=Q$, i na tén czás $y=P\pm o$, a zatém obydwie przyſtawy na obydwóch ſtronach ſtaną ſię równémi, czyli zniydą ſię w iedno miéyſce, gdzie przyſtawa będzie ſtyczną linii krzywéy, a punkt dotykaniá ſię będzie punktem dwoiſtym, iakim iéſt w miéyſcach n.p. C, G. Przechodząc iuż za tén ſtán, wſzyſtkié wártości y ſą uroionemi; więc za punkt dotykaniá ſię linia nie przeſtępuie, ale od niego zwrácá ſię nazád. Ieżeli zaś za C znayduie ſię miéyſce przyſtáw uroionych; i znowu za G ku prawéy idąc ſtronie, miéyſce przyſtáw rzetelnych; idzie zatém, że zmniéyſzaiąc wártość odcinku $-x$, czyli pomykaiąc ſię od G ku A, wpadniémy na krainę przyſtáw uroionych, gdzie ſię muſi ſkończyć odnoga linii krzywéy idącéy od G, a zacząć ſię granica uroionych przyſtáw, przez które liniá krzywá nie przechodzi: przeto znowu w Fig. 4.

tamtém mieyscu, y będzie przechodzić s stanu rzetelnego na uroiony przez $P^2=Q$, i przystawa będzie styczna, od którey liniá krzywá cofnie się nazád. Na tén czás liniá będzie miała dwie odnogi od siebie oderwané $MBDB$, $FmHm$, które będą náleżyć do iedney linii krzywey, poniewáż obydwie wypádaią z iedney funkcyi.

Takowé oderwané odnogi co do swey postaci i liczby zawisły od zrównaniá $P^2-Q=o$. Ile bowiem zrównanie to zamyká pierwiástków, tyle iest mieysc na osi, gdzie przystawa dotyká się linii krzywey, i pokazuie zwrácanie się odnogi od swey styczney. Té pierwiástki albo są równe albo nierówné: w pierwszym przypádku pokazuią że dwie styczne schodzą się; które ieżeli przedtém zamykały między sobą odnogę linii krzywey iakié są na fig. 4. GH,FE; szedłszy się razém, odnoga ta zamiéniá się w punkt nazwany PUNKTEM SPRZĘŻONYM (*Punctum conjugatum.*) Ieżeli zaś dwie takowé styczne zamykały mieysce przystáw uroionych, iakié są FE, DC; szedłszy się razém, odnoga HmF oderwaná, złączy się z odnogą BDB i powstanie s tąd węzeł, iaki nám wyráżá na figurze punkt I, i liniá krzywá stanie się na tén czás LINIĄ WĘZŁOWĄ (*Curva nodata*). W drugim przypadku, to iest: kiedy zrównanie $P^2-Q=o$ má pierwiástki nierówné, każdy pierwiástek takowégo zrównaniá pokáże nám mieysce na osi, gdzie przystawa stáwszy się styczną, znaczyć będzie odwrót linii krzywey, i iey odnogi oderwané.

Niech będzie y funkcyą tróy-ksztáltną x, zamkniętą w zrównaniu $y^3-Py^2+Qy-R=o$, gdzie P, Q, R, zamykaią x bez żádnégo znaku pierwiástkowégo Ieżeli zrównanie to zamyká wszystkié trzy pierwiástki rzetelné, każdey wártości x będą odpowiada. trzy wártości na y, i liniá krzywá będzie trzy razy przeciętá od przystawy iak n.p. na fig. 5. w mieyscach M, M, M, chyba że dwa punkta znidą się razém iak n.p. przy D, i na tén czas przystawa stáwszy się styczną,

Fig. 5.

czną, naznaczy punkt dwoiſty *D*. Ieżeli zaś zrównanie 3go ſtopnia zamykać będzie dwa piérwiaſtki uroioné, na tén czas przyſtawa w iednym tylko miéyſcu przecinać będzie linią krzywą, iak nám wyráżá fig. 6. to atoli przecięcie nigdy nie może uſtać, dlá tego że trzeci piérwiáſtek ſtać ſię nie może uroionym, i liniá krzywá rosciągnie ſię bez końca z obydwóch ſtron początku odcinków: ieżeli trzy wártości na *y* będąc s początku rzetelné, ſtaną ſię potém uroionémi na *x* dodatné lub odiemné; liniá krzywá przy *A* na fig. 6. iako przy początku odcinków może miéć odnogę oderwaną iaką ieſt *BBE*. Natura iednak i poſtać téy odnogi, a zatem i poſtać faméy linii krzywéy nie może bydź znaną tylko przez rozwiązanie zrównaniá 3go ſtopnia i roſtrząſanie natury iego piérwiáſtków. Wiémy z §.20. Algebry że wártość na *y* muſi zamykać w ſobie prócz znaku $\sqrt[3]{}$, znak ieſzcze $\sqrt{}$; pod tym oſtatnim znakiém zawártá funkcyá, może miéć albo trzech mnożników nierównych i na tén czás pokazuie nám trzy miéyſca na osi znaczącé odnogi oderwane: albo dwa mnożniki równé, któré wyrážaiąc zniyście ſię dwóch ſtycznych, odkryią nám węzeł lub punkt ſprzężony podług miéyſca przyſtáw uroionych lub rzetelnych, między témi ſtycznémi zawartégo: albo nakoniec wſzyſtkié trzy mnożniki téy funkcyi pod znakiem $\sqrt{}$, będą równe, i na tén czás wyrážaią zniyście ſię trzech ſtycznych razém. W tym oſtatnim przypádku powſtaie w linii krzywéy Konczystość (*Cuſpis*), iaką ſobie łatwo wyſtawiémy na fig. 4. ieżeli odnogę *BDB* zamiéniémy przy *I* na punkt ſprzężony. Wſzyſtkié té właſności obiaśnią nám przykłady w dalſzym ciągu naſzéy nauki. Uczyniwſzy w zrównaniu 3go ſtopnia podaném $y^3=o$, zoſtanie ſię $Py^2-Qy+R=o$, to zrównanie nie przeſtanie ieſzcze wyrážać linii 3go porządku; ieżeli *P*, *Q*, *R*, zamykaią *x* w ſtopniu 3cim; na tén czas liniá krzywá nie będzie tylko dwa razy przecinaną od przyſtawy, ieżeli obié wártości na *y* ſą

Fig. 6.

ſą rzetelné, ale będzie mogła bydź trzy razy przeciętą od linii proſtéy, i té przecięciá okáżą ſię w trzech wártościach na x, o czém mowić będziémy niżéy.

Niech będzie y funkcyą czteró-kſztáłtną x wyrażoną n. p. przez zrównanie $y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = o$. To że zamykać może albo wſzyſtkié cztéry piérwiáſtki rzetelné, albo wſzyſtkié uroioné, albo dwa rzetelné, a dwa uroioné; liniá krzywá takiém zrównaniém opiſaná może bydź albo w cztérech, albo w dwóch punktach przeciętą od przyſtąwy, albo w żá-
Fig. 7. dnym; iako widziéć możémy na fig. 7. Ieżeli piérwiáſtki zrównaniá podanégo zacząwſzy bydź rzetelné, ſtaną ſię potém na záwſze uroionémi; liniá krzywá nie będzie miéć żádnéy odnogi nieſkończonéy, ale ſię zamknie między dwiema ſtycznémi w mieyſcach przéyściá piérwiáſtków rzetelnych na uroioné. Uważaiąc zrównanie moment tén przeyściá wyrażaiącé, a razem naznaczaiącé miéyſce przyſtawie ſtycznéy, uważaiąc ié mowię co do ſwych piérwiáſtków, równych lub nierównych, podobnie iak w poprzédzaiących przykładach, znáydziémy mieyſca przecięć na osi RS, liczbę odnóg oderwanych, węzły lub kończyſtość linii krzywéy, co wſzyſtko lubo niżéy zechcémy obſzérniéy wyłożyć, nie ieſt iednak od rzeczy namiénić o tych prawdach, które s teraźniéyſzych uwág wypádaią.

Naprzód: że poznanie figury czyli ryſunku linii krzywéy zależy od rozwiązaniá zrównaniá ią wyrážaiącego, i. od roſtrząśnienia natury iego piérwiáſtków. A zatém im zrównanie linią krzywą wyrážaiącé ieſt wyżſzégo ſtopnia, tém ieſt zawikléyſzé i trudniéyſzé poznanie iéy ryſunku. Owſzem takowé poznanie kończy ſię na tych liniach, których zrównaniá ieſteśmy w ſtanie rozwiązać. Doſkonałość zatém geometryi, zawiſła całkiem od doſkonałości teoryi zrównań.

Powtóre: ryſunek linii krzywéy okazuie ſię s prze-
cięciá

cięciá iéy od linii proftéy, to zas przecięcie co do miéyfca, liczby, i gatunku, wypádá z liczby i gatunku piérwiáftków. Ieżeli y ieft funkcyą wielokfztáłtną x daną przez zrównanie ftopnia n; każdéy wártości x będzie odpowiadać wártości rzetelnych na y albo liczba n, albo $n-2$; $n-4$, - - - $n-k$; k będąc koniecznie liczbą párzyftą. Każdá więc przyftawa będzie przecinać linią krzywą w tylu punktach. Przypuśćmy n.p. że iedna przyftawa przeciná linią krzywą w m miéyfcach; wfzyftkié inné przyftawy mufzą ią przecinać w tylu miéyfcach, ażeby liczba przecięć różniła fię od m liczbą párzyftą. Ieżeli więc raz liczba przecięć ieft párzyfta, wfzyftkié inné przecięciá linii krzywéy od iakiéykolwiek przyftawy mufzą bydź w liczbie párzyftéy, gdzie rachowané bydź powinny punkta podwóyné, potroyne, i t. d.

Potrzecie. Przecięcie ciągłé i nieprzerwané nigdy linii krzywéy od przyftawy, pokazuie odnogi niefkończoné. To zaś przecięcie fkutkiém ieft piérwiáftków rzetelnych w zrównaniu nie mogących fię nigdy ftać uroionémi. Zrównaniá więc nie mogącé nigdy miéć wfzyftkich piérwiáftków uroionych, czyli zrównaniá ftopni niepárzyftych wyrázaią linie krzywé maiącé koniecznie przynáymniéy dwie odnogi niefkończoné, iednę na ftronie odcinków dodatnych, drugą na ftronie odcinków odiemnych; dodaię *przynáymniéy*; ponieważ bydź może więcey takowych odnóg, ieżeli piérwiáftki wfzyftkié lub kilka z nich fą ftatecznie we wfzyftkich wártościach x rzetelnemi. S czego fię zaraz oczywiście pokazuie, że linie krzywé wyrażoné zrównaniém ftopniá parzyftégo mogą nie miéć żadnéy odnogi niefkończonéy; albo maiąc ié, liczba tych odnóg bydź mufi koniecznie párzyftá: ta oftatniá właśność ſłuży liniom krzywym ftopni nieparzyftych, to ieft: że liczba wfzyftkich odnóg musi bydź párzyftá: a przeto nie może bydź żádná liniá krzywá, którąby miała iednę tylko odnogę niefkończoną,

czoną, to ieft ciągnącą się z iedney tylko ftrony początku odcinków.

Ieżeli wártość przyftawy z rozwiązaniá zrównaniá wypádaiącá będzie wyrażoná przez ułomek n.p. $y=\frac{P}{Q}$, takowá przyftawa ftanie się nieskończoną tyle razy, ile razy Q bedzie zero, co nám pokazuie nowy przypádek, że nawet wártości skończoney na x, może odpowiadać przyftawa nieskończoná, co będąc właściwe famym liniom krzywym maiącym odnogi nieskończone, náleżyć będzie roftrząfanie takowych przypádków tam, gdzie o odnogach nieskończonych linii krzywych przypadnie nám mowić.

S tych pierwfzych uwag nad liniami krzywemi wydobytych z natury zrównań, powinniśmy fobie wnieść łatwo gatunek dociekań, które nás w dalfzym ciągu tey nauki maią zaprzątnąć. Nim do tych przyftąpiemy, ftaráymy się wprzód lepiey zrozumieć naturę i odmiany znaczeń geometrycznych.

§. III.

Oddzielenie rzeczy istotnych od arbitralnych wchodzących w zrównanie na linią krzywą iakąkolwiek.

W wfzyftkich tych roftrząfaniach, to ieft tylko liniom krzywym iftotne, że ich natura wyráża się przez związek między dwiema wfpół-ufzykowanemi w zrównaniu zawarty. Oprócz tego wiele barzo rzeczy wchodzi od upodobaniá zawiflych, iako to: oś; iey położenie, początek odcinków: mieyfce wfpółufzykowanych dodatnych lub odiemnych; kąt nakoniec który między fobą czynią odcinki s przyftawami. Te wfzyftkie rzeczy iako arbitralne mogą różnym podpádać odmianom; a zatem dadź zrównaniu wyrázaiącemu linią iaką, niezliczoną liczbę poftaci, które przecięż natury linii przez to nie mogą uczynić odmienney. Iakże się tedy znaleśdź rozumowi nafzemu w śrzód tylu odmián, i rozeznać czyli z wielu zrównań wyftawionych pod różną poftacią, każde z ofobna wyráża tę famę linią co i drugie, lub inną? Widzemy że to zawifło od ogólnego ograniczenia rzeczy. Zatrzymáymy się w fzczególności nad

każdą

każdą s tych odmián arbitralnych, a może tą drogą doydziémy do iakiéy cechy, służącéy nám do rozeznáwaniá zrównáń, a zatém do ułatwieniá zachodzącéy trudności.

Odmiéniá się początek odcinków.

Zaczniymy od początku odcinków, i dáymy n. p. że rachuiąc ié naprzód od *A.* (Fig. 8.) chcémy ié potém rachować od *D*, iakże się nasze zrównanie w tym razie odmieni? Nazwiymy $DP(t)$; $AD(f)$, a będzie $x+f=t$, czyli $x=t-f$, tę wártość x, stósowną do nowégo początku odcinków, włożywszy w podané zrównanie, otrzymámy zamiást związku między x, y; tén sám związek między t, y; aże f brać może nieskończoną liczbę wártości; zrównanie nasze przez tę samę różność odmiénić się w niezliczoné sposoby może: ieżeli iednak maiąc dwa zrównaniá między sobą na pozór różné, włożywszy w iedno z nich za x, $t\pm f$; odmienię ié na drugié; mám prawo bydź pewnym, że takie zrównaniá obydwa wyrážaią tę samę linią, ale w każdém z nich odcinki poczynaią się w inném miéyscu. Położyłem $t\pm f$; ponieważ ieżeli początek odcinków posuwá się ku lewéy stronie, wypadnie $x=t-f$; iéżeli zaś ku prawéy będzie $x=t+f$.

Fig. 8.

Odmiéniá się wielkość przystáw.

Wystáwmy sobie teráz, że się przystawy odmiéniaią, to iest: że PM zamiéni się na $P'M$, albo $P''M$; chcąc tę nową kondycyą wprowadzić w zrównanie między x, y; przez P', lub P'' prowadzę oś rs równo-odległą piérwszéy; nazywám $A'A$, różnicę między nowémi i dáwnémi przystawami (g); nową zaś przystawę $P'M$, albo $P''M$, (u); wypadnie więc $y\mp g=u$; czyli $y=u\pm g$; znak wyższy náleży do P', niższy do P''; włożywszy tę wártość za y w zrównanie, otrzymámy nowé między u, x, zamiást piérwszégo między x, y; w tém zrównaniu możná iesżcze dlá téy iednéy kondycyi różné czynić odmiany; dlá tego że g mieć może różné iakiékolwiek wártości, ale té wszystkié odmiany zostawią tę samę naturę linii; tak dalece: że ieżeli z dwóch zrównáń

różnych

różnych na pozór, iedno potrafię zamienić na drugie, kładąc w niém za y, $u \pm g$; pewién ieſtem, że obydwa iednę wyrážaią linią, lecz każdá z nich bierze różnéy wielkości przyſtawy.

Odmiana początku odcinków i przyſtáw razém.

Ieżeli zaś iak przyſtawy tak początek odcinków odmiéniá ſię razém n.p. że nie tylko PM odmiéni ſię na $P'M$, ale i A' przenieſie ſię na D', na tén czas wyrażémy obydwie té kondycye w zrównaniu, położywſzy za x, $(t \pm f)$; a za y, $(u \pm g)$, a tak zrównanie między x, y, przerobiémy na inné między t, u; któré tę ſámę linią będzie wyrážać co i piérwſzé.

Odmiana osi pionowéy,

Przypuśćmy teráz że oś RS odmieni ſwoié miéyſce, i przenieſie ſię na $R'S'$ pionowo do piérwſzéy, na tén czas $R'Q = PM$, $QM = R'P$. ieżeli n.p. R' było początkiém odcinków, w téy nowéy odmianie dáwné odcinki ſtaną ſię teráz przyſtawami, a dawné przyſtawy odmienią ſię na odcinki. Położywſzy więc w zrównaniu naſzém x za y, i y za x; wprowadzémy tę nową kondycyą, która nic w naturze linii nie odmiéni. Ieżeli ieſzcze ſtrony wſpół-uſzykowanych dodatnych i odiemnych chcemy odmienić, tak n.p. że przerábiaiąc zrównanie na t, u; tę ſtronę która przed tém naznaczoná była dla linii dodatnych, weźmiémy za ſtronę odiemnych; a ſtronę odiémnych przenieſiemy na ſtronę dodatnych; w tym przypádku nie náleży tylko za t położyć $-t$; a za u, $-u$; a wſpomniona kondycya będzie wyrażoná.

Oś pionowá przemiéniá ſię na ukośną.

Fig. 9.

Poydźmy iuż do zawikléyſzych odmián, i dáymy że oś RS na fig. 9. przenieſła ſię na rs, przecinaiąc piérwſzą w początku odcinków, i czyniąc z nią kąt PAs, który nazwiémy ϕ, a utrzymáwſzy ieſzcze tę kondycyą że wſpół-uſzykowané ſą pionowémi, iakże wyrażémy tę nową odmianę? Przypatrzmy ſię uwágą, że w tym ſtanie dáwné wſpół-uſzykowane AP, PM, przemiéniaią ſię na $AQ(t)$, $QM(u)$, prowadzoné od tegoż ſamégo punktu M, pionowo do nowéy osi. Náleży więc wyrazić x, y, przez funkcyą kąta ϕ, i przez té przybyſzé lub uimki, którémi ſię powię-

kſzyła

kszyła lub zmnieyszyła która s współ-uszykowanych *AP*, *PM*. Na ten koniec nazwiymy Wst. ϕ, (m). Dost. ϕ, (n). a wziąwszy iedność za promień podług naszego zwyczaiu; wypadnie $mm+nn=1$. Od *P*, pociągniymy pionową *Pp* rowno-ległą *QM*, drugą *Pq*, rowno-odległą *rs*. Będzie $Pp=AP.Wst.\phi=xm$; $Ap=x.Dost.\phi=xn$. A poniewáż kąt $PAs=$ kątowi $PMq=\phi$; będzie $Pq=PM.Wst.\phi=ym$; $Mq=PM.Dost.\phi=yn$. Aże $AQ(t)=Ap-Pq=nx-ym$; $QM(u)=Mq+Qq=Mq+Pp=yn+xm$; przeto mámy: $t=nx-ym$; $u=yn+xm$. A s tąd $nt+mu=x$, - - - $nu-mt=y$. Włożywszy więc w podane zrównanie za x, $(nt+mu)$; a za y, $(nu-mt)$, przerobiémy ie na inne do osi *rs*. Ieżeli *rs* przeniesie się nad *RS*, na ten czas kąt ϕ, będzie odiemnym, a zatém i iego wstawa.

Chcąc ieszcze ogólniey rzecz uważać, dáymy że oś *RS* przemienia się na *rs* iako nám fig. 10. pokazuie, i że z osią początek odcinków przenosi się na *D*, chcąc te nowe kondycye wciągnąć w zrównanie: od *D* ciągnę linią *DL* równo-ległą osi *RS*, a pytanie nasze zamknie poprzedzaiące odmiany, to iest: że w poprzedzaiącem działaniu x powiększy się wielkością $AD(f)$, a y wielkością $OP(g)$, przeto włożywszy w poprzedzaiący wynalazek za x, $x+f$; a za y, $y+g$, wynáydziemy $u=yn+gn+xm+mf$ - - $t=xn+nf-ym-gm$, a s tąd wyciągniemy $x=nt+mu-f$; - - $y=nu-mt-g$, które wártości włożywszy w podane iakie zrównanie, przerobiémy ie na inne, którego oś będzie się nachylać do pierwszey kątem ϕ; i w którém iak przystawy tak odcinki będą inney wielkości, to iednak zrównanie nic w naturze linii nie odmieni. Wnieśmy sobie łatwo, że takowe linii wyrażenie iest barzo ogólne, przypuściwszy współ-uszykowane pionowe, ponieważ ono zamyka w sobie wszystkie inne, iako lekka uwaga każdego o tém przekona. Powtóre że takowe zrównania, s których

Zebranie wszystkich poprzedzaiących odmian.

fig. 10.

których iedno przerábiá ſię na drugié, wyrážaią tęż ſamę linią lubo pod inną poſtacią.

Wſpół-uſzykowane pionowe odmieniaią ſię na ukośne.

Ale ieſzcze chcąc uwági naſzé do náyogólnieyſzych przywieśdź początków, odmieńmy nawet i tę kondycyą że wſpół-uſzykowané ſą pionowémi, i wyſtáwmy ſobie, że oné ſię nachylaią do ſiebie kątém ψ. s tym warunkiem, że tén kąt ieſt iedén dlá wſzyſtkich.

Fig. 8.

Dlá iaśnieyſzégo poięciá rzućmy okiem na fig. 8. i zadáymy ſobie do wynalezieniá związek między AL i LM, nakłonionémi kątem ALM (ψ), zamiáſt AP i PM pionowych. W tym przypadku $AL=t$; - - $LM=u=\frac{y}{W\!ſt.\psi}$; $PL=\frac{y.Doſt.\psi}{W\!ſt.\psi}=uDoſt.\psi$; a nazwáwſzy $W\!ſt.\psi$, (p); $Doſt.\psi$, (q); będzie $u=\frac{y}{p}$; - - $t=x+uq$; zaczém $y=pu$; $x=t-uq$; włożywſzy té wártości na mieyſce x, y, w podané zrównanie, przerobiémy ié na inné, któré wyrážać będzie naturę linii krzywéy, przez wſpół-uſzykowané nakłonioné do ſiebie kątem ψ. I przeciwnie: maiąc zrównanie między t, u, wſpół-uſzykowanémi nakłonionémi do ſiebie kątem ψ, włożywſzy na mieyſce t; $(x+\frac{yq}{p})$, a na mieyſce u, $(\frac{y}{p})$; przerobiémy ié na inné między x,y, wſpół-uſzykowanémi pionowo, zoſtawiwſzy tę ſamę oś i tén ſam odcinków początek.

Z wſzyſtkich poprzedzaiących odmian wyciągá ſię zrównanie náyogólnieyſzé na linie.

Fig. 10.

Na koniec odmieńmy ieſzcze to wſzyſtko, i wziąwſzy na fig. 10. za początek odcinków D; oś iakąkolwiek rs; dwie wſpół-uſzykowané $DT(r)$, $TM(z)$ pochyłé kątem $DTM(\psi)$; ſzukáymy wártości x, y, w funkcyach dwóch kątow i nowych przybyſzów. Na tén koniec od D do osi RS, wynoſzę linią pionową DG, którą nazywám g; $AG(f)$. Od D wiodę linią DL równo-odległą RS: kąt QDL nazywám ϕ; iego

Wſtawę

Wstawę (m), Dostawę (n), Wst. ⸸, (a); Dost. ⸸, (b). Od M do nowéy osi spuszczám pionową $MQ(u)$, $DQ(t)$. Mámy s poprzédzaiących wynalázków - - $x=nt+mu-f$, - - $y=nu-mt-g$, teráz zaś $QT=\frac{ub}{a}$, $TM(z)=\frac{u}{a}$; $DT(r)=DQ+QT=t+\frac{ub}{a}=t+bz$. Więc $t=r-bz$ - - $u=az$. Włożywszy té wártości na t,u, w zrównaniá wyżéy wyrażoné na x, y, wypádá: - - $x=nr-(nb-ma)z-f$; - - $y=-mr+(na+mb)z-g$; gdzie $nb-ma=Dost.AVM$, $na+mb=Wst.AVM$; włożywszy więc za x,y, té ich wártości w zrównanie podané, przerobiémy ié na zrównanie náyogólniéysze linii krzywéy, poniéważ to nie iest przywiązané do żádnégo szczególnégo warunku, ale ié wszystkié w sobie zawiérá.

Té samé sposoby służą nám do náyogólniéyszégo zrównaniá linii prostéy. Niech będą dwie linie proste rownó-ległé na figurze 11. RS, MN, wszystkié przystawy PM, będą sobie równé, a zatém zrównanie $y=c$: chcąc ié przerobić na zrównanie ogólné do osi rs; mám s poprzédzaiących wynalázków $y=nu-mt-g$, czyli $nu-mt-g-c=o$. A chcąc ieszcze współuszykowané miéć ukośné; kładę za t, $r-zb$; za u, az; i wypádá $(na+mb)z-mr-g-c=o$, a rozmnożywszy ié przez ilość stateczną k dlá tym ogólniéyszégo wyrazu, i nazwáwszy $kna+kmb=a'$, $-mk=b'$; $-k(g+c)=c'$, otrzymám: Fig. 11.

$$a'z+b'r+c'=o.$$

Zrównanie náyogólniéysze na linią prostą, którè że iest 1go stopnia, idzie za tém, że wszystkié zrównaniá 1go stopnia oznáczaią linią prostą.

Weźmy za drugi przykłád koło iako linią krzywą wiadomą z geometryi początkowéy, a chcąc wynaleśdź punkt M, fig. 12. szukáymy związku między $AP=x$, i $PM=y$. Tén związek poddaie nám Geometrya *Euklidesa*, która nás uczy że PM iest śrzednią Fig. 12.

proporcyonalną między AP i PB: nazwiymy $AB=g$, będzie $PB=g-x$, a przeto:

$AP:PM::PM:PB$ to ieſt: $x::y::y:g-x$ s' kąd wypádá zrównanie na koło:

$$y^2=gx-x^2 \quad - \quad - \quad - \quad (\alpha)$$

chcémy náprzód poznać, czyli zrównanie $y^2=a^2-x^2$ wyráżá także naturę koła: przenieśmy początek odcinków z A do środka C, tak że CP będzie odcinkiém, który nazwiémy z, PM przyſtawą y; ponieważ $CP=CA-AP=\frac{1}{2}g-x=z$, będzie więc $x=\frac{1}{2}g-z$ włożywſzy tę wártość w (α) przerobiémy to zrównanie na $y^2=\frac{1}{4}g^2-z^2$, które ieſt takiém iak - - $y^2=a^2-x^2$ gdzie $a=\frac{1}{2}g$; więc zrównanie $y^2=a^2-x^2$ ieſt także zrównaniém na koło, w którém a ieſt promieniém, a początek odcinków wzięty w środku C. Trudność więc naſza iuż ſię doſtatecznie ułatwiła. Maiąc kilka zrównáń, a chcąc ſię przekonać, czyli té wſzyſtkié iednę linią krzywą wyrážaią, biorę za x, y, wártości wyciągnioné s poprzédzaiących odmián, za pomocą których otrzymám zrównaniá pod wielu poſtaciami; potém náypodobniéyſzé między ſobą równám co do każdégo terminu, a s tąd wypadną mi zrównaniá ſzczególné na oznaczenie ilości f, g, m, n, i t. d. ſłużącé; ieżeli tylé ich otrzymám ilé mám nieoznaczonych ilości, i ieżeli nowé wſpółuſzykowané ſą w tymże ſtopniu co i dáwné; pewién ieſtem, że zrównaniá moié náleżą do téy ſámey linii krzywéy: s tą różnicą że w nich zachodzą odmiany odpowiadaiącé wártościom wziętym za x,y.

§. IV.

S poprzédzaiących odmián wyciągá ſię iſtotny charakter zrównáń ſłużący za grunt do podziáłu linii na różné klaſsy.

Nauczyliśmy ſię iuż, że zrównanie na iakąkolwiek linią może ſię zamiénić w niezliczoné poſtaci, któré nic nie odmieniaią w naturze ſaméy linii: ale ieſzcze nie známy pewnégo charakteru, któryby nám za pierwſzém rzuceniém oka dáł ſię przekonać, że zrównaniá náleżą do różnych linii. Łącząc początki geometryczné s początkami myśleniá, powinniśmy ſię

zaraz

zaráz domyślić, że takowégo charakteru náleży nám upatrować w naturze funkcyi iako iedyném zrzodle naſzych dociekáń. *Powtóré:* że tén charakter tak iſtotny powinién był zoſtać nienaruſzonym przechodząc przez wſzyſtkié odmiany, któré dopuścić może iakiékolwiek zrównanie; ieżeli natura linii w tych wſzyſtkich różnościach ieſt zupełnie ocaloná. Oświeceni temi dwiema prawdami, wróćmy ſię uwágą do działáń § poprzédzaiącégo, a tam wpadnie nám zaráz w oczy, że przerábiaiąc na różné poſtaci różné zrównaniá, otrzymaliśmy w tych wſzyſtkich przemianach zawſze tenże ſám ſtopień między wſpół-uſzykowanémi, tak dalece: że każdé zrównanie przebrané w inſzą poſtać, ani ſię przez to zniżyło, ani podnioſło do wyżſzégo ſtopnia. S kąd mámy prawo upewnić ſię, że ſtopień zrównáń ieſt iſtotną cechą oddzielaiącą ié iedné od drugich, tak dalece; że zrównaniá różnégo ſtopniá, należą koniecznie do różnych linii krzywych. Tén náypewniéyſzy charakter obiéramy ſobie z J. P. Eulerem za záſadę kláſs, na któré linie dzielić będziémy. Podziáły takowé nazwiémy Porządkami (*Ordines*). Do piérwſzégo porządku náleżyć będą wſzyſtkié linie oznaczoné zrównaniém 1go ſtopnia między dwiema wſpół-uſzykowanémi x, y; iakiém ieſt zrównanie ogólné:

$$a+bx+cy=o:$$

któré wiémy, że náleży do linii proſtéy: a zatém liniá proſtá zamknięta będzie w piérwſzym porządku, o któréy náuka náleży do geometryi początkowéy, a przeto od teraźniéyſzégo naſzégo zamiaru daleká.

W drugim porządku będą linie zamknięté w zrównaniu náyogólnieyſzém 2go ſtopnia między x, y: iakiém ieſt:

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2=o.$$

do którégo náleżą ſławné linie krzywé pod imieniem Ucinków ostro-krągowych (*Sectiones Conicae*).

Trzeci porządek zamknie wſzyſtkié linie oznaczoné zrównaniem náyogólniéyſzém 3go ſtopnia między x,y.

$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+gx^3+hx^2y+ixy^2+ky^3=o.$

W czwártym porządku umieszczémy linie zawarté w zrównaniu náyogólnieyszém 4go stopnia.

$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+gx^3+hx^2y+ixy^2+ky^3+lx^4+mx^3y+nx^2y^2+pxy^3+qy^4=o.$

Idąc tym sposobém do wyższych porządków, potrzeba nám na każdy z nich podadź zrównanie zamykaiącé naprzód x, y, w potędze temu porządkowi właściwéy: powtóre wszystkié kombinacye między x, y, w tymże stopniu, i wszystkich innych któré go poprzédzaią. A co na iedno wynidzie, że każdy porządek powinién zamykać w swém zrównaniu całé zrównanie porządku poprzédzaiącégo, i oprocz tego terminy ze wszystkiémi któré tylko powstać mogą mnogościami x, y, składaiącémi potęgę porządku danégo: tak n. p. zrównanie na porządek piąty, zamykać powinno całe zrównanie porządku czwártégo, i oprócz tego terminy z mnogościami.

y^5, x^5, y^4x, x^4y, y^3x^2, x^3y^2.

każdá s tych mnogości iak widzémy czyni potęgę piątą. Takowych przybyszowych terminów do zrównaniá porządku poprzédzaiącégo, liczba iest $n+1$; gdzie n znaczy wykładnika porządku podanégo. Przeto liczba terminów wchodzących w zrównanie na iakikolwiek porządek n, wyrazić się może przez liczbę terminów porządków poprzédzaiących. Takowy wyráz zamyká széreg postępu arytmetycznégo.

$(n+1)+n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)+(n-5)+(n-6)$ i t. d.

Zbiór więc czyli summa tego szeregu dá nám liczbę terminów wchodzących w zrównanie na linie porządku n. Tę summę wynáydziémy łatwo za pomocą zrównań (A), (B), w §. 47. Algebry, uczyniwszy $a=n+1$, $u=o$, $b=-1$. a zrównanie naprzód (A) dá nám liczbę terminów w szeregu, czyli

$x=\frac{-(n+2)}{-1}=n+2$, s czégo za pomocą zrównaniá

(B)

(B) znáydziémy fummę $s=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Zrównanie więc na linie porządku n, zamykać powinno terminów $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Łatwo fobie każdy bez oftrzeżeniá wniefie, że chcąc fądzić o ftopniu zrównaniá, a zatém o porządku linii, którą wyrážá, należy ié wprzód ofwobodzić od znaku piérwiáftkowégo, ieżeli iaki zamyká, n.p. $y^2=\sqrt{ax+x^2}$: zdaie fię bydź drugiégo porządku; w rzeczy atoli faméy wyrzuciwfzy znak piérwiáftkowy, ieft czwártégo: $y^4=ax+x^2$.

§. V.

Przeftrogi na zrównanie złożone, wynikaiące z mnożenia zrównań niżfzych ftopni.

Zaftanowiwfzy fię nad ftopniami zrównań, wpadnie podobno nie iedén z nas na tę myśl, że zrównanie iakiégokolwiek ftopnia może fię fkładać z zrównań ftopni niżfzych iako fwych mnożników, na które w takim przypádku możná ié rozebrać. Znalázłfzy takowych mnożników iednó-kfztałtnych, każdy z nich oznáczać będzie linią tego porządku, do którégo náleży. Złożywfzy ich więc znowu w iedno zrównanie, możeż s takiégo fkładu powftać nowá liniá ciągłá wyżfzégo porządku? Teoryá generalná zrównań w piérwfzéy Części Algebry wyłożoná i dobrze rozumem obiętá, uczy nás, że to bydź nie może: że ieżeli zrównanie iakiégokolwiek ftopnia powftało z mnożeniá zrównań niżfzych ftopni, nie rodzi fię s tąd żádná nowá linia, ale to zrównanie ieft fkładém wfzyftkich linii, wyrażonych przez niżfzé zrównanie, s których tamto powftało: tak n.p. zrównanie 3go ftopnia ieżeli powftało z mnożeniá zrównaniá 2go ftopnia przez zrównanie 1go, i ieżeli piérwiáftki w pierwfzém nie fą uroioné; każdéy wártości x, będą odpowiadać trzy przyftawy, s których dwié będą náleżyć do linii 2go porządku, a trzéciá do linii piérwfzégo. Ieżeli zaś powftało z mnożéniá trzéch zrównań 1go ftopnia; wfzyftkié trzy przyfta-

wy náleżyć będą do linii proftych. S tąd wypádaią dwa wnioſki barzo oczywiſte: *Naprzód:* że każdé zrównanie wyrážaiącé linią iednę ciągłą pewnégo porządku, nie powinno bydź rózbieralne na żádné mnożniki iedno-kſztaltné wymierné, któréby ſkładać mogły zrównaniá oſobné na linie innych porządków. *Powtóré:* ieżeli któré zrównanie może ſię rozebrać na takowych mnożników; nie wyráżá linii tégo porządku, który ieſt przywiązany do iégo ſtopnia; ale ieſt ſkładém tych wſzyſtkich linii niżſzych ſtopni, które pokazuią iego mnożniki, i dlá tegoć to taki gatunek zrównáń nazywá ſię SKŁADANYM (*Aequationes complexae*). Dorozumiewa ſię każdy, że tylko piérwſzy rodzáy zrównáń náleżyć może do naſzégo zámiaru. Nie potrzeba nám ſię zaſtanáwiać nad różnémi kombinacyami zrównáń niżſzych ſtopni, s których powſtać może iakiékolwiek zrównanie ſkładané; wiémy bowiem że n.p. zrównanie *4go* ſtopnia, może powſtać albo z dwóch zrównáń *2go* ſtopnia, albo z zrównaniá *3go*, przez zrównanie *1go* ſtopnia, albo s czterech zrównáń *1go* i t.d. każdéy s tych kombinacyi odpowiadá inny zbiór linii.

§. VI.

Wykładaią ſię właſności ogólné Linii każdégo porządku.

Maiąc w pamięci początki wytłómaczoné w §. 2. wiémy doſtatecznie, że náyiſtotniéyſzą właſnością każdéy linii krzywéy iakiégokolwiek porządku ieſt przecinanie iéy od linii próſtéy; liczba takowych przecięć uczyłaby nás zawſze o ſtopniu zrównaniá wyrážaiącégo tę linią; gdyby wſzyſtkié iéy piérwiáſtki były rzetelné, co do ilosci odmiennéy náywyżſzégo wymiaru. W tém bowiem przypuſzczeniu zawſzeby przyſtawa przecinała ráz linią *1go*, dwa razy linią *2go*, trzy razy linią *3go*, *n* razy linią *ngo* porządku. Ale że w zrównaniá wchodzić mogą w liczbie párzyſtéy piérwiáſtki uroioné, przeto liczba przecięć nie uczy nás więcéy, iak tylko, że liniá nie może bydź niżſzégo porządku nad tén, który wyráżá liczba przecięć; ale czy nie ieſt wyżſzego

porządku

porządku nic nás nie uczy. Wiédząc n.p. że liniá iaka może bydź w dwóch miéyſcach przeciętą od proſtéy; pewni ieſteśmy, że ona nie może náleżyć do 1go porządku; ale może należyć do którégokolwiek z wyżſzych. S tąd ieſzcze i to wnieść możémy, że liniá iakiégokolwiek porządku n, nie może bydź więcéy nad n razy przeciętą od linii proſtéy. Liczba takowych przecięć zmniéyſzyć ſię może albo dlá piérwiáſtków uroionych, albo dlá terminów brakących w zrównaniu. Ieżeli zrównanie podané zamyká terminy náywyżſzégo wymiaru co do każdéy z oſobna ilości odmiennéy, w linii takowém zrównaniém opiſanéy nie może braknąć liczba przecięć tylko párzyſtá: bo tén niedoſtatek wypádá s piérwiáſtków uroionych, które ſię nie mogą znaydować tylko w liczbie párzyſtéy. Ale ieżeli w zrównaniu na linią krzywą braknie terminów náywyżſzégo wymiaru iednéy ilości odmiennéy, liczba przecięć w takowéy linii może braknąć párzyſtá lub nie párzyſtá, i tak n.p. dwa zrównaniá $y^2+ay+bx^2+cx^3+d=o$. - - $y+ax^3+dx^2+e=o$. wyrážaią dwie linie 3go porządku, s których piérwſzá dwa razy tylko bydź może przeciętą od y, a trzy razy, lub ráz od x. Drugá zaś, ráz tylko bydź może przeciętą od przyſtawy y, a trzy razy lub ráz od osi; w obydwóch liczba przecięć od x, nie może braknąć tylko párzyſtá, ale liczba przecięć od y, w piérwſzéy niepárzyſtá, a w drugiéy párzyſta braknie.

Liczbę przecięć linii każdégo porządku od linii proſtéy, wyciągnąć możémy z iéy zrównaniá, położywſzy $y=o$; tym bowiem ſpoſobém otrzymámy zrównanie tegóż ſamégo ſtopnia na x; którégo piérwiáſtki ieżeli będą wſzyſtkié rzetelné, odkryią nám miéyſca, w których liniá przeciná oś: ieżeli zaś będzie zamykać niektóré piérwiáſtki uroioné, liczba przecięć tylé razy będzie mniéyſzá, ilé ieſt piérwiáſtków uroionych. Ze zaś oś ieſt linią proſtą, któréy położenie ieſt arbitralné; kładąc $y=o$ w zrównanie,

prowadzémy oś przez té wſzyſtkié mieyſca, w których liniá krzywá bydź może przeciętá od proſtéy.

Zoſtaie nám teráz roſtrząſnąć ilości ſtateczné, które wchodzą w wſpół-czynniki zrównáń iakiégokolwiek ſtopnia. Wyrážaią oné pewné mieyſca przywiązane do ich wártości ſzczególnych, przez które liniá krzywá má przechodzić; §. bowiem 3. oświécił nás, że różné wártości ilości ſtatecznych odmieniaią wielkość i położenie wſpół-uſzykowanych, a zatém przenoſzą punkta linii krzywych z iednégo mieyſca na drugié, zoſtawiwſzy ié tylko przy tym ſamym związku który ieſt iſtotny. Chcąc więc linią iakiégokolwiek porządku przez pewné iakié mieyſca prowadzić, i do pewnéy iakiéy osi ſtóſować, należy w zrównaniu wſpół-czynnikom ſtatecznym nieoznaczonym a, b, c, i t.d. pewné nadadź wártości przywiązané do tych mieyſc przez które má liniá przechodzić. Ze zaś zrównanie na linią porządku n, zamyká . - - - $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ terminów, a zatém tyléż wſpół-czynników nieoznaczonych; nadáwſzy pewné wártości terminom $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\frac{n(n+3)}{2}$, oſtatni iuż przez to ſamo ſtaie ſię oznaczoném dlá związku koniecznégo s piérwſzémi zawartégo w zrównaniu. Tak n.p. liniá proſtá má trzech wſpół-czynników nieoznaczonych, s których nadáwſzy dwóm pewną iaką wártość, trzeci iuż przez to ſamo weźmie oznaczenie wypádaiącé z związku, który między niémi zachodzi. Té dwie wártości, naznaczą dwa punkta, przez które liniá má przechodzić; przeto do oznaczeniá pewnéy linii proſtéy potrzeba koniecznie dwóch punktów; prawda, któréy nas geometryá początkowá nauczá. Nie maiąc tylko iedén punkt, czyli iednégo tylko wſpół-czynnika oznaczonégo, liniá zoſtaie nieoznaczoną; to ieſt: że przez tén punkt nieſkończoná liczba linii bydź może prowadzonych.

Zrównanie

Zrównanie na linie 3go porządku potrzebuie pięciu pewnych wártości, czyli do oznaczenia pewnéy linii 2go porządku trzeba koniecznie pięć punktów, przez które iedna tylko a nie inſzá liniá 2go porządku może przechodzić; maiąc ich mniéy, liniá będzie nieoznaczoná, i przez té punkta nieſkończoná liczbá linii 2go porządku może bydź prowadzoná. Chcąc linią 3go porządku tak oznaczyć, aby ona przechodząc przez pewné miéyſça, żádná inná przez té ſamé miéyſca nie mogła przechodzić, potrzeba do tego 9. punktów: maiąc ich mniéy, przez nie, nieſkończoná liczbá linii 3go porządku bydź może prowadzoná. Toż ſamo mowić o innych porządkach. W znáczéniu atoli wſzyſtkich punktów, to ieſt ſzczególnégo, że zrównániá odkrywaiącé wártości pewné na wſpółczynniki a, b, c, i t.d. wſzyſtkié ſą 1go ſtopnia. A zatém żádén punkt, gdziekolwiek go obierzémy, nie może wypaśdź niepodobném. Ieżeli atoli więcéy punktów leżéć będzie w proſt, niżeli bydź może przecięć w linii pewnégo porządku, na tén czás wpadniémy na zrównanie złożoné; tak n. p. gdyby w zrównaniu 2go ſtopnia 3. punkta były wproſt; ponieważ liniá 2go porządku nie może bydź w trzech miéyſcach przeciętá od proſtéy; zrównanie naſzé zamieni ſię na zrównanie złożoné z dwóch linii proſtych.

§. VII.

Podobieńſtwo linii krzywych.

Uwáżać tylko linią krzywą iako mogącą przechodzić przez różné miéyſca, ieſt to iedno co uwáżać dwie wſpół-uſzykowané co do różnéy wielkości, i co do różnégo względém ſiebie położeniá; między któremi iednak zachodzący ſtóſunek, i cáłkiém záwiſły od związku ilości w zrównaniu zawartych zoſtáie tén ſám; ieżeli zrównanie ieſt co do związku ilości nieodmienné. Takowá uwága różnych położeń iednéy linii krzywéy ciągnie za ſobą odmianę ilości ſtatecznych, to ieſt: że chcąc w różnych położeniach linią krzywą uwáżać, muſzémy ilości ſtatecznė

czné odmiéniać: ieżeli té ilości odmiéniaią się przez nadanie im co ráz różnéy wártości; liniá krzywá s tąd wypádaiącá nie odmiéni swégo porządku, ale może odmiénić swóy gatunek z odmianą położeniá: ieżeli zaś té ilości stateczné odmiéniaią swoię wielkość dlá tego tylko, że się odmieniá iedność, czyli liniá wziętá za miarę porównywaniá; liniá krzywá w tym przypádku odmiéniá tylko swoię wielkość nie odmiéniaiąc gatunku. I dlá tego kiedy zrównanie na linią krzywą zamyká iednę tylko ilość stateczną służącą za miarę różnych odmián w współ-uszykowanych, odmiéniaiąc tę stateczną ilość, wypádaią linie krzywé nie różniącé się od siebie tylko położeniém i wielkością, któré nazywać będziémy LINIAMI PODOBNEMI (*Curvae similes*), n. p. zrównanie na koło $y^2=2ax-x^2$, zamyká sám tylko promiéń a, który odmiéniaiąc, otrzymámy koła różnych promiéni między sobą podobné. Zrównanie na linią krzywą 3go porządku $y^3-2x^3+ay^2-ay^2x+2a^2y=0$-(G) maiąc także iednę tylko ilość stateczną, wyrážać będzie niesfkończoną liczbę linii między sobą podobnych odmiéniaiąc w niém a. Do zrózumieniá dokładniéyszégo tych podobnych linii wystáwmy sobie

Fig. 13. 14. że fig. 13, 14, wyrážaią dwie linie krzywé między sobą podobné i zamknięté w zrównaniu (G), w których AB, CD, są ilościami statecznémi, a to iest, że $AB=a$ odmiéniło się na $CD=\frac{a}{n}$, nazwáwszy $AP=x$, $PM=y$, będzie $CL=\frac{x}{n}$, $LN=\frac{y}{n}$, będzie więc - -

$AP: CL=AB: CD=PM: LN$, to iest że będą się miały współ-uszykowané w obydwóch tych liniach, iako się maią ich ilości stateczné AB, CD: i wszystkié linie iakiékolwiek pod iednym kątém w obydwóch tych liniach prowadzoné iako to n.p. MQ, MO, będą się miały iako $AB: CD$; ich zaś płaszczyzny iako potęgi drugié tychże ilości statecznych $AB^2: CD^2$.

W iednym

W iednym więc zrównaniu uważać możémy nieskończoną liczbę takowych linii krzywych biorąc ilość stateczną za odmienną. Takową stateczną ilość służącą do porównywania odmián w spół-uszykowanych przybraną nazywać będziémy odtąd Linią równania (*Parameter*).

Tu iuż powinniśmy poznać drogę, któréy nám się trzymać należy w ciągu teraźnieyszéy nauki. Uważać nasámprzód będziémy zrównania różnych stopni w cáłéy swéy ogólności, i s tąd wyciągać własności powszechné linii różnych porządków. Wprowádzaiąc potém w té zrównania warunki szczególné, wypadną nám różné gatunki linii krzywych w tym porządku ogarnioné. Té znowu szczególné zrównania osobno rostrząsané, odkryią nám własności każdému gatunkowi szczególné.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Z uwág ogólnych nad zrównaniém 2go stopnia między dwiema ilościami odmiennémi, wyciągaią się własności Linii krzywych 2go porządku: szczególné przypuszczenia w zrównanie wprowadzoné, odkrywaią nám szczególné gatunki linii krzywych 2go porządku i własności każdému gatunkowi służącé.

§. VIII.

Zrównanie náyogólnieyszé 2go stopnia między dwiema odmiennémi ilościami x, y, nie mogącé się rozebrać na dwa prosté 1go stopnia, a przeto zamykaiącé w sobie wszystkié linie krzywé 2go porządku iest: — Własności cięciw.

$$y^2 + \frac{ex+c}{f}\,y + \frac{dx^2+bx+a}{f} = 0 \quad - - - \quad (\alpha)$$

które

które uważać będziemy naprzód co do terminów znakomitych funkcyą iaką pierwiáſtków; ſtóſuiąc ie zaś do linii krzywey 2go porządku, doſtrzegać właſności z natury tych terminów wypádaiących, wprowádzać nakoniec będziemy odmiany w §. 3. wyliczone, i s tych nowe wydobywadź właſności. A iako nátura linii krzywych poznaie ſię s pewnych ſtóſunków i związków dwóch linii proſtych, tak właſności różne tychże linii krzywych zależyć będą równie na pewnych właſnościach linii proſtych różnym ſpoſobem prowadzonych do linii krzywych: co zawſze pokazuie drogę analityczną prowadzącą rozum od rzeczy znanych do nieznanych.

Przypuściwſzy że fig. 15. wyſtawiá nám linią krzywą 2go porządku opiſaną zrównaniem (α). Dla Fig. 15. ogólnego poznaniá właſności takowey linii niech A będzie początkiem odcinków na osi AS; kąt wſpółuſzykowanych ukośny; $AP=x$, $PM=y$. Ponieważ wſpół-czynnik 2go terminu zrównaniá (α) ieſt ſummą pierwiáſtków; będzie $PM+PN=-\frac{ex+c}{f}=-\frac{eAP+c}{f}$; $P'M'-P'N'=-\frac{eAP'+c}{f}$, od tego oſtatniego zrównaniá odciągnąwſzy pierwſze; otrzymámy $\frac{NQ+RM}{PP'}=\frac{e}{f}$. Stóſuiąc podobnie tó działanie do fig. 16. gdzie przyſtawy pádaią z obydwóch ſtron Fig. 16 osi, znáydziemy $\frac{MR-NQ}{PP'}=\frac{e}{f}$ to ieſt: że w każdey linii 2go porządku poprowadziwſzy dwie cięciwy ſobie równoległe, i od dwóch punktów linii krzywey leżących na iedney cięciwie, pociągnąwſzy linie równoległe osi, *Summa albo różnica odległości ſpacznych dwóch punktów linii krzywey na drugiey cięciwie leżących, od tych równoległych osi; ma ſię do odcinku osi między cięciwami zawartego w ſtóſunku*

zawſze

zawſze nieodmiennym: ſumma, kiedy cięciwy nie pádaią obydwie z obydwóch ſtron osi, różnica zaś, gdy obydwie cięciwy znayduią ſię z obydwóch ſtron osi. Dáymy teráz że cięciwa ſtanie ſię ſtyczną linii krzywéy w miéyſcu C; punkta M, N znidą ſię razém u C, i będzie znowu $\frac{CK-CI}{CP}=\frac{e}{f}$; $\frac{CK'-CI'}{CP'}=\frac{e}{f}$, a przeto $(CK-CI)CP'=(CK'-CI')CP$: ieżeli więc uczyniémy $CK-CI=o$, czyli $CK=CI$, będzie koniecznie; $CK'=CI'$, to ieſt: ieżeli od ſtycznéy prowadzoná liniá proſtá dzieli cięciwę równoległą ſtycznéy na dwie części równé; ta ſama liniá dzielić będzie wſzyſtkié inné cięciwy równoległé pierwſzéy na dwie części równé: liniá taká dzieląca wſzyſtkié cięciwy między ſobą równoległé na dwie części równé, nazywá ſię SRZEDNICĄ linii drugiégo porządku (*Diameter*). Liniá więc proſtá równoległá cięciwóm na dwie części równé od śrzednicy przeciętym, prowadzoná przez punkt linii krzywéy na śrzednicy leżący, ieſt zawſze ſtyczną linii krzywéy. S tey właſności wypádá nám bárzo proſty ſpoſob prowadzeniá ſtycznych i śrzednic do iakiégokolwiek punktu linii 2*go* porządku. Niech będzie n.p. punkt dany E na linii krzywéy, do którégo prowadzić mi potrzeba ſtyczną; naryſowáwſzy cięciwę VL, dzielę ią na dwie części równé $FV=FL$, przez dwa punkta E, F, prowadzoná liniá proſtá będzie śrzednicą, a przez punkt E pociągnioná liniá równoległá cięciwie VL będzie ſtyczną linii 2*go* porządku. Ta ieſzcze właſność przekonywá nás, że wziąwſzy w linii 2*go* porządku śrzednicę za oś, przyſtawy na niéy poſtawioné będąc między ſobą równé, z nich zaś iedna dodatná, drugá odiemná; zbiór takowych przyſtaw będzie zero, a przeto w zrównaniu na linie 2*go* porządku ilé razy śrzednica ieſt osią, wſpół-czynnik 2*go* terminu a z nim termin zamykaiący y zniknie;

Pierwſá właſność wyciągnioná z 2go terminu zrównaniá.

i przeci-

i przeciwnie ile razy zrównanie na linią 2go porządku nie ma drugiego terminu; w linii tey srzednica iest wziętą za oś, cośmy iuż widzieli w kole pod §. 3.

Weźmy teraz trzeci do rostrząsania termin w zrównaniu (α) ten będąc zawsze mnogością z dwóch pierwiastków; uczy nas, że na fig: 15. $PM.PN=$

Fig. 15. $\frac{dx^2+bx+a}{f}$. Drugi członek tego zrównania może się składać albo z dwóch pierwiastków rzetelnych, albo z dwóch uroionych; pierwszy przypadek ma mieysce kiedy oś przecina linią krzywą w dwóch mieyscach; iakie są F, G; w tych bowiem mieyscach $y=o$, a zatem $\frac{dx^2+bx+a}{f}=o$, zrównania tego pierwiastki są AF, AG; a przeto $\frac{dx^2+bx+a}{f}=\frac{d}{f}(x-AF)$ $(x-AG)=\frac{d}{f}PF.PG$, s kąd wypada znowu $\frac{PM.PN}{PF.PG}$ $=\frac{d}{f}$ stosunek nieodmienny w każdey linii 2go porządku. Aże równie $\frac{P'M'.P'N'}{P'F.P'G}=\frac{d}{f}$, więc

$$PM.PN:PF.PG=P'M'.P'N':P'F.P'G$$

bedzie więc na fig: 17. gdzie PD iest osią iaką dopiero była PG, OQ zaś iey równo-legła, będzie mówię:

Fig. 17. $$OT.TQ:TM.TN=GC.GD:GI.GH=FI.FH:FO.FQ,$$

Drugá własność cięciw wydobytá z ostatniego terminu zrównaniá. to iest: że w każdey linii, drugiego porządku dwie cięciwy przecinaiące się, czynią stosunek nieodmienny mnogości z dwóch odcinków, do mnogości z drugich dwóch odcinków.

Wystawmy sobie teraz że PM przeniosło się na PR, i punkta M, N, szedłszy się razem uczyniły $PM=PN$ $=PR$, z dopiero dowiedzioney własności wypada że

$$PR^2:PC.PD=\frac{d}{f};\ SR^2:SL.SK=\frac{d}{f},\ \text{a zatem}$$ PR^2:

$PR^2:PC.PD=SR^2:SL.SK.$

Przeciąwszy dwie linie równo-ległé sobie PD, i SK, w miéyscach X, Z tak, żeby PX było śrzednią proporcyonalną między PC, i PD; SZ śrzednią proporcyonalną między SL i SK; podług tego warunku - - $PX^2=PC.PD$; $SZ^2=SL.SK$, a przeto

$PR^2:PX^2=SR^2:SZ^2$, czyli $PR:PX=SR:SZ$

punkta więc X, i Z znáyduią się na iednéy linii RZ: co nám odkrywá nową włáſność, to ieſt: ieżeli liniá od punktu dotknięciá R tak przetnie którą s cięciw, że PX będzie śrzednią proporcyonalną między PC i PD; wszyſtkié inné cięciwy równo-ległé piérwszéy będą podobnie przecięté: znowu ieżeli PX, SZ będą śrzednié proporcyonalné między PC, PD; SL, SK; liniá przez dwa té miéysca X, Z, przechodzącá przéydzie koniecznie przez punkt dotknięciá R.

Wróćmy się teráz do drugiéy włáſności cięciw, a ſtósuiąc ią na fig. 16, do dwóch cięciw NM, CP, s których oſtatniá będąc śrzednicą, czyni $PM=PN$; będzie $PM^2:CP.PD=P'M'^2:P'C.P'D=\frac{e}{f}$: nazwáwszy Fig. 16.

CD wziętą za oś, m; $CP=x$, $PM=y$; będzie

$PD=m-x$; - - - $y^2=\frac{e}{f}(mx-x^2)$ - - - (β)

nowé zrównanie na linie 2go porządku, w któréḿ śrzednica ieſt osią, a punkt C początkiéḿ odcinków.

Obierzmy sobie terás na fig: 18. cztéry punkta, A, B, C, D, tak żeby cięciwy AB, CD, były równoległé, złączywszy ié s sobą, otrzymámy trapez $ABCD$. Weźmy do tego punkt piąty M, i przez tén prowádźmy cięciwę MN równo-ległą piérwszym. Wiémy z geometryi początkowéy, że gdyby śrzednica linii krzywéy przecięła dwa boki trapezu AB, CD, na dwie części równé; będzie także podobnie przecinać im równo-legły PQ: powtóré taż śrzednica będzie także przecinać MN na dwie części równé, zaczém $MP=QN$, to ieſt: maiąc pięć punktów znanych w Fig. 18.

 linii

linii 2go porządku, mámy zaráz wiadomy szósty. Prawdą którąśmy iuż wyżéy s kąd inąd poznali.

Drugá włásność cięciw uczy nás: że $MP.MQ$ do $BQ.QD$ iest w stósunku nieodmiennym: poprowadziwszy więc przez punkt M,RS równo-ległą BD, będzie $MR=BQ$, $MS=QD$, a przeto $MP.MQ:MR.MS$ stósunek nieodmienny na punkta przecięć P,Q,R,S, między równo-ległémi AB, MN, BD, RS. Obierzmy ieszcze gdziekolwiek punkt O, a łącząc go s punktami A,B,D, otrzymámy trapez $ABDO$. Przez tén punkt poprowadzoná GH równo-ległá AB daie:

$$MP.MQ:MR.MS=OG.OH:BH.HD$$

S troykątów zaś podobnych APL, AGO, STD, DOH, i z włásności trapezu $ABGH$ mámy następuiące proporcye:

$AP:AG=PL:GO.$
$AP:AG=BQ:BH$ z nich wypádá $PL:BQ=GO:BH.$

MQ czyli $DS:ST=OH:DH.$

Przeto: $PL.MQ:ST.BQ=GO.OH:BH.HD.$

$$PL.MQ:ST.BQ=MP.QM:MR.MS.$$

$$(MP+PL)MQ:(MS+ST)MR=PM.MQ:MR.MS.$$

ponieważ $MR=BQ$, $ML.MQ:MT.BQ=PM.MQ:MR.MS$

czyli $ML:MT=PM:MS.$

iakimkolwiek więc sposobém odmiéniać się będzie punkt O, byleby punkt M był stáły, i MQ, RS równo ległémi cięciwom AB, BD; będzie $ML:MT$ stósunkiém nieodmiennym.

§. IX.

Wykładaią się włásności dalsze śrzednic, i zrównaniá na ich oznaczenie.

Włásności cięciw przyprowadziły nás w §. poprzédzaiącym do poznaniá śrzednic w liniach 2go porządku. Użyimy teráz tych piérwszych o śrzednicach wiadomości náprzód do wynaydowaniá zrównań oznaczaiących położenie i wielkość śrzednicy iakiéykolwiek: powtóre do odkryciá ich włásności zawikléyszych. Niech będzie na fig. 19. GI śrzednicá linii 2go porządku, wziąwszy AH za os będzie

Fig. 19.

$$LM=LN, \text{ a zatém } PL=\frac{PM+PN}{2}=\frac{-ex-c}{2f}=\frac{-eAP-c}{2f}$$

$\frac{-eAP-c}{2f}$; nazwáwszy $PL=z$; zrównanie między $AP=x$, i $PL=z$, będzie zrównaniém na średnicę GI, to iest:

$$2fz+ex+c=o \quad - \; - \; - \quad (A).$$

chcąc teráz oznaczyć wielkość GI, potrzeba nám wyrazić tę linią przez funkcyą samych iłości znanych wchodzących w zrównanie (α); ponieważ zaś - - $GI^2=KH^2+(GK-HI)^2$, stárać nám się potrzeba drugi tén zrównaniá członek przez iłości stateczné zrównaniá (α) wyrazić. Na tén koniec stósuiąc zrównanie (A) do punktów G,I, będzie $GK=\frac{-eAK-c}{2f}$;

$HI=\frac{-eAH-c}{2f}$, $GK-HI=\frac{e(AH-AK)}{2f}=\frac{eKH}{2f}$,

a przeto $GI^2=\frac{e^2+4f^2}{4f^2}KH^2$. Nie zostaie nám iuż tylko wyrazić KH przez samé iłości stateczné. Ażeli KH, iest odcinkiem osi AH, czyli pewną funkcyą x; łatwo się przekonać że punkta K i H nie mogą bydź odkryté tylko za pomocą zrównaniá na oś: potrzeba nám zrównanie (α) przerobić na zrównanie oznáczaiącé oś, a dopiéro piérwiástki iego dadzą punkta, K, i H, a zatém i wartość szukaną KH. Ta uwaga prowadzi nás do rachunku następuiącégo: $PM+PN=\frac{-ex-c}{f}$; $PM.PN=\frac{dx^2+bx+a}{f}$, $(PM-PN)^2=(PM+PN)^2$

$-4PM.PN=\frac{(e^2-4df)x^2+2(ce-2bf)x+c^2-4af}{f^2}$.

Przy punktach G, I, $PM=PN$; drugi więc członek naszego zrównaniá staie się zero, i razem zrównaniém na AH, to iest:

$$x^2+\frac{2(ce-2bf)}{e^2-4df}x+\frac{c^2-4af}{e^2-4df}=o$$

piérwiástki dwa tego zrównaniá są linie AK, AH, a przeto

$AK+AH=\frac{4bf-2ce}{e^2-4df}$; $AK.AH=\frac{c^2-4af}{e^2-4df}$; $(AH-AK)^2$
$=(AH+AK)^2-4AH.AK$
$=\frac{4(2bf-ce)^2-4(e^2-4df)(c^2-4af)}{(e^2-4df)^2}=KH^2$ co zupełnie rozwięzuie naſzé zadanié. Zebyśmy ié ieſzcze ogólniéy rosciagnęli; odmiéńmy wſpół-uſzykowané pionowé na ukośné, $P'M$, $P'N'$, AP'; nazwiymy kąta $PP'M$ wſtawę g, doſtawę h; $AP'=t$, $P'M=u$, otrzymámy za pomocą trygonometryi $u=\frac{y}{g}$,
$P'P=uh=\frac{yh}{g}$, $t=x-uh$, czyli $y=ug$, $x=t+uh$, włożywſzy té wártości za x, y, w zrównanié (α) zamiéniémy ié na

$$u^2+\frac{egt+cg+2dht+hb}{fg^2+egh+dh^2}u+\frac{dt^2+bt+a}{fg^2+egh+dh^2}=o \;\; - \; - \; (B).$$

dwa piérwiáſtki tego zrównaniá ſą $P'M$, $P'N'$, któré znowu nowá śrzednica EF przecıná na dwie części równé: Zrównanie oznáczaiącé tę śrzednicę podobnie iak i piérwſzą ieſt: $P'L'=\frac{P'M+P'N'}{2}=-$
$\frac{egt+cg+2dht+hb}{2(fg^2+egh+dh^2)}$, czyli nazwáwſzy $P'L'=w$ - -

$$2(fg^2+egh+dh^2)w+(eg+2dh)t+cg+bh=o \;\; - \; - \; (C).$$

chcąc nową tę śrzednicę przywiéśdź do wſpół-uſzykowanych pionowych iakié były na GI w zrównaniu (A), ſpuſzczám od L' pionową $L'Q=q$, $AQ=p$, będzie $w=\frac{q}{g}$, $P'Q=\frac{qh}{g}$, $t=p-\frac{qh}{g}$, włożywſzy za w, t, dopiéro wynalezioné wártości w funkcyi p, q; otrzymámy:

$$(2fg+eh)q+(eg+2dh)p+cg+bh=o \;\; - \; - \; (D).$$

Zrównanie (D), oznáczá położenie śrzednicy EF, która

którá śrzednicę GI przeciná w punkcie C. Punkt tén przecięciá ieſtże punktém ſpólnym dlá innych śrzednic, których tylé bydź może prowadzonych, ilé punktów liniá krzywá zamyká? rozwiązanie tégo zádaniá godné ieſt całą naſzę zaſtanowić uwágę. Ieżeli punkt C ieſt punktém ſpólnym dlá wſzyſtkich śrzednic w linii 2go porządku, powinién on bydź niezawiſłym od kąta między dwiema śrzednicami zawartégo; potrzeba nám więc w rozwiązaniu tego pytaniá wiedzieć náturę kąta GCE czyli tén nie ieſt funkcyą kątá wſpół-uſzykowanych? ieżeli tak ieſt; należy nám dopiéro ſzukać zrównaniá na oznaczenie punktu C dwom śrzednicom ſpólnégo; w tym zrównaniu na punkt C, ieżeli znáydziem g, albo h; będziém mieli prawo ſądzić, że punkt C odmieniá ſię na każdé dwie śrzednice; ieżeli zaś wyráz na punkt C nie będzie zamykáł żádnéy funkcyi kąta iakiégokolwiek $L'P'Q$, wnieſiémy że on ieſt zawſze tén ſám dlá wſzyſtkich śrzednic linii krzywéy. Idźmy za tą uwágą w ciągu całégo rachunku ſzukaiąc naſámprzód wyrazu kąta ECG. Przedłużywſzy śrzednice GI, EF; piérwſzá z nich przetnie oś w punkcie O, drugá zaś w punkcie R: będzie więc przy O, $PL=o$ i zrównanie (A), położywſzy $z=o$, dá

$$AO=x=-\frac{c}{e};\quad PO=-\frac{c}{e}-x=\frac{-ex-c}{e},\quad \frac{PL}{PO}=\frac{ez}{-ex-c}=\frac{e}{2f}=Sty.AOL;$$

a przeto ſtyczná kątu $PLO=\frac{2f}{e}$. U punktu R na drugiéy śrzednicy opiſanéy zrównaniém (D'), $QL'=q=o$. s kąd wyciągámy

$$AR=p=\frac{-cg-bh}{eg+2dh};\quad QR=AR-AQ= \;\text{- -}\; \frac{-cg-bh-p(eg+2dh)}{eg+2dh};$$

ſtyczná kąta $ARL'=\frac{L'Q}{QR}$

 =

$= \frac{q(eg+2dh)}{-cg-bh-p(eg+2dh)} = \frac{eg+2dh}{2fg+eh}$; kąt $RCO =$ $ARL' - AOL$; maiąc zaś tych dwóch ostatnich kątów styczne za pomocą wzoru $sty.(a-b) = \frac{sty.a - sty.b}{1+sty.a.sty.b}$, znaydziemy $sty. RCO = \frac{4dfh - e^2h}{4f^2g+2feh+2deh+e^2g}$, ponieważ w tém ostatniém zrównaniu znayduie się f, g, pewni iesteśmy, że kąt między dwiema śrzednicami zawarty iest funkcyą kąta, który czynią współ-uszykowane $P'L'$, $P'Q$: nie zostaie nam więc, tylko znaleśdź zrównanie na oznaczenie punktu C. Tén punkt znayduiąc się równie na śrzednicy GI, i na EF, wyraża się przez przystawę pionową CD za pomocą zrównań (A), (D). Nazwawszy $AD=r$, $CD=s$, i włożywszy r, s, za x, z, w zrównanie A; potém za p, q, w zrównanie D; otrzymamy ich dwa; $2fs+er+c=0$ - - - -

$$(2fg+eh)s+(eg+2dh)r+cg+bh=0$$

z dwóch tych zrównań wypada:

$$r = \frac{2fb-ce}{e^2-4df},\quad s = \frac{2cd-be}{e^2-4df}$$

Piérwsza własność śrzednic. W obydwóch tych zrównaniach nie zamyka się żadna funkcya kąta między współ-uszykowanémi zawartégo, to iest ani g, ani h; przeto punkt C iest niezawisły od kąta śrzednic, i iest spólny wszystkim śrzednicom. Punkt takowy nazywać będziémy ŚRZODKIEM linii krzywéy *(Centrum curvae)*. Wartość na r, iest połową wartości wynalezionéy na $AK+AH$, przeto $AD = \frac{AK+AH}{2}$, przeto w każdéy lini 2go porządku śrzednice przecinaiąc się w punkcie C, dzielą się w tém przecięciu na dwie części równe.

§. X.

Weźmy teraz śrzodek C za początek odcinków, śrzednicę zaś GI za oś, a obiąwszy dobrze zrównanie

nie (β) pod §. 8 wynalezione, wyrazić ie możemy ogólniey:

Wynayduie się związek między śrzednicami iakiémikolwiek.

$$y^2 = n + px + qx^2 \quad - \quad - \quad - \quad (\beta)$$

w niém $y=o$, zostawia zrównanie na punkta G, I, $n+px+qx^2=o$. tak dalece: że $AG+AI=-\frac{p}{q}$, $AC=$

Fig. 20.

$\frac{AG+AI}{2}=-\frac{p}{2q}$. Rachuiąc odcinki s śrzodka C, niech będzie $CP=t=-\frac{p}{2q}-x$, czyli $x=-\frac{p}{2q}-t$, włożywszy tę wartość za x w zrównanie (β), przebiémy ie na - - $y^2=n-\frac{p^2}{4q}+qt^2$, którégo wyráz ogólny iest:

$$y^2 = a' - b'x^2 \quad - \quad - \quad - \quad (\gamma).$$

Trzy zrównania (α), (β), (γ), na linie krzywe 2go porządku, znakomite są warunkami, s których wypadły. Piérwsze wyráża związek współ-uszykowanych do iakiéykolwiek osi odnoszonych: drugie pokazuie śrzednicę wziętą za oś; trzecie nakoniec uczy, że śrzednica iest osią, a śrzodek linii krzywéy początkiém odcinków. W tém ostatniém biorąc x dodatne albo odiémne, nic się cale nie odmienia; co nás uczy, że kiedy $CP=CP'$, będzie także $PM=P'M'$, i linia MM' równo-legła osi GI, przecięta iest od BC na dwie części równe. BC więc má tę samę właśność która służy GI, iż cięciwy równo-ległe GI przeciná na dwie części równe, tak iako GI przeciná cięciwy równo-ległe BC. Przeto linia BE równo-legła przystawom przechodząca przez śrzodek C iest drugą śrzednicą. Dwie takowe śrzednice, s których iedna przeciná cięciwy równo-ległe drugiéy na dwie części równe, nazywaią się Śrzednicami sprzężonemi (*Axes conjugati*). Styczná więc linii krzywéy prowadzoná do punktu G, albo I, iest zawsze równo-ległą drugiéy śrzednicy sprzężonéy BE; i znowu

ſtyczna przy punkcie B, albo E ieſt równo-legła GI podług §. 8. W zrównaniu (γ) uczyniwſzy $x=o$, $y=\pm\sqrt{a'}=CB$, nazwawſzy $BC=k$, będzie $a'=k^2$, uczyniwſzy zaś $y=o$, mámy $x=\pm\sqrt{\frac{a'}{b'}}=CG$: niech będzie $CG=g$, wypadá $b'=\frac{k^2}{g^2}$; włożywſzy té wártości w zrównanie (γ), otrzymámy:

$$y^2=k^2-\frac{k^2}{g^2}x^2 \quad - \quad - \quad - \quad (C')$$

gdzie ſamé śrzednice ſprzężoné ſą ilościami ſtatecznémi.

W każdéy linii 2go porządku maiącéy śrzodek C, a przeto nieſkończoną liczbę śrzednic, iedney iakiéykolwiek śrzednicy odpowiadá drugá ſprzężoná; zoſtaie nám więc porownać między ſobą takowé śrzednice, przez wynalezienie związku zachodzącego między śrzednicami iakiémikolwiek, i między śrzednicami ſprzężonémi: co nás wieśdź może do nowych właſności śrzednic, i do ſpoſobu dokładniéyſzégo na prowadzenie ſtycznych. Spoſób użyty na otrzymanie zrównaniá (C') ſłużyć nám powinien za wzór do teraźniéyſzego wynalázku; przezéń bowiém potrafiliśmy ilości ſtateczné zrównaniá (γ) przez śrzednice wyrazić. Gdybyśmy ieſzcze mogli za téż ilości ſtateczne zrównaniá (γ) wprowadzić funkcye kątów między śrzednicami zawartych, mielibyśmy związek śrzednic przez kąty wyrażony, a przeto zupełne rozwiązanie pytaniá. Na tén koniec przypuśćmy, że zrównanie (γ) wyráża związek między wſpół-uſzy-
Fig. 21. kowanémi $CP=x$, $PM=y$ nakłonionémi do ſiebie kątem $APM=q$, którégo wſtawa m, doſtawa n; chcąc té wſpół-uſzykowane przerobić na inſze odnieſioné do ſwoiéy osi, poprowádźmy s punktu M cięciwę MO czyniącą kąt $AQM=p$, którégo wſtawa r, doſtawa s; będzie więc RS osią nowéy téy cięciwy, HK
osią

osią sprzężoną. Potrzeba nám teráz zrównanie (γ) przerobić na inne do osi RS, i współ-uszykowanych CD, DM. Aże CD iest funkcyą CQ, i DQ; DM funkcyą QM, DQ; idzie zatem że muszemy wprzód z zrównaniá (γ) wyciągnąć wártości na CQ, QM; to iest: trzeba nám nasámprzód współ-uszykowane CP, PM, przerobić na $CQ=t$, $QM=u$, a dopiero s tych ostatnich wyciągnąć wártości na CD, DM. Te wszystkie rozumowaniá wyszczególni rachunek nastepuiący. Kąt $PMQ=p-q$, $Wst.(p-q)=rn-sm$, przeto $PM=y=\frac{ru}{m}$, $PQ=\frac{rn-sm}{m}u$; $x=t-QP=t-\frac{rn-sm}{m}u$; włożywszy te wártości za x, y, w zrównanie (γ), przerobiemy ie na

$$u^2-\frac{2b'mt(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2}u+\frac{b'm^2t^2-a'm^2}{r^2+b'(rn-sm)^2}=o.$$

dwa pierwiastki tego zrównaniá są $QM-QO=\frac{2b'mt(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2}$, ponieważ D iest w srzodku cięciwy MO; $QD=\frac{QM-QO}{2}=\frac{b'mt(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2}$; potrzeba nám teráz wynaleśdź kąty, ACD, RDM; dlá łatwieyszego linii między sobą stósowaniá przenieśmy te kąty na fig. 22. utrzymáwszy nazwiska iuż kątom AQM, APM, nadane, i od D spuściwszy prosto-padłą mámy $BD=QD.r$; $BQ=QD.s$; przeto styczná kątu $ACD=\frac{BD}{BC}=\frac{QD.r}{CQ+QD.s}=\frac{b'm(rn-sm)}{r+b'n(rn-sm)}$; styczna $BDC=\frac{CQ+QD.s}{QD.r}$; $sty.BDQ=\frac{s}{r}$; więc $sty.QDC=$ $sty.(BDC-BDQ.)=\frac{r.CQ}{DQ+CQ.s}=sty.RDM$. S tych dopiero wynalezionych linii i kątów łátwo nám będzie Fig. 22.

dzie znaleśdź CD: wiémy bowiém że $CD^2 = CQ^2 + 2s.CQ.DQ + QD^2 = t^2 + \frac{2b'mt^2s(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2} + \frac{b'^2m^2t^2(rn-sm)^2}{[r^2+b'(rn-sm)^2]^2}$. Drugi tén członek przywiódłſzy do iednégo mianownika, otrzymámy:

$$CD^2 = \frac{r^4+[2b'r^2ms+(2br^2+b^2m^2)(rn-sm)](rn-sm)t^2}{[r^2+b'(rn-sm)^2]^2} + \frac{[2b^2ms(rn-sm)^2+b^2(rn-sm)^3](rn-sm)}{[r^2+b'(rn-sm)^2]^2}t^2$$

ilości w liczniku między náwiaſami kwadratowémi zawarté rozebráwſzy, i zapomocą dwóch zrównáń $m^2+n^2=1$, $r^2+s^2=1$, wyraziwſzy - - - - - -

$$b'^2m^3s^2 = b'^2m^3s - b^2r^2sm + b^2r^2n^2sm;$$

$$r^3n^3b^2 = r^3nb^2 - b^2m^2nr + b^2m^2s^2rn;$$

kilka terminów zniknie, i zoſtanie.

$$CD^2 = \frac{r^4+2b'r^3n(rn-sm)+b'^2r^2(nr-sm)^2}{[r^2+b'(rn-sm)^2]^2}t^2$$

$$CD = \frac{rt.\sqrt{[r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(rn-sm)^2]}}{r^2+b'(rn-sm)^2}.$$

nazwiymy teráz nowé wſpół-uſzykowané $CD=w$, $DM=z$; wypadnie náprzód z oſtatniégo zrównaniá na CD.

$$t = \frac{(r^2+b'(rn-sm)^2)w}{r\sqrt{[r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(nr-sm)^2]}};$$

a ponieważ $u = QD + z = z + \frac{b'mt(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2}$, włożywſzy w to zrównanié wártość znalezioną na t; otrzymámy:

$$u = z + \frac{b'mw(rn-sm)}{r\sqrt{[r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(nr-sm)^2]}};$$ aże

$x = t - \frac{(rn-sm)u}{m}$, $y = \frac{ru}{m}$, położywſzy za t, u, wártości dopiéro odkryté, wypadnie:

$x=$

$$x=\frac{rw}{\sqrt{[r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(nr-sm)^2]}}-\frac{(rn-sm)z}{m}$$

$$y=\frac{rz}{m}+\frac{b'w(rn-sm)}{\sqrt{[r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(nr-sm)^2]}},$$

wártości té za x, y, położywfzy w zrównanié (λ), zamiéniémy ié na inné wyrážaiącé związek między CD, i DM:

$$\frac{r^2+b'(rn-sm)^2}{m^2}z^2+\frac{b'[r^2+b'(rn-sm)^2]}{r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(rn-sm)^2}w^2$$
$$-a'=o \text{ - - - - - } (D).$$

Dáymy teráz nazwifka kątóm zachodzącym między śrzednicami: $APM=ACE=q$; $AQM=ACH=p$, $GCR=A'$; $ECH=B'$; $p=q+B'$, $RCH=q+B'-A'$; $m=W\!ft.q$, $n=Doft.q$, $r=W\!ft.(q+B')$, $s=Doft.(q+B')$, $rn-sm=W\!ft.B'$. Wynaleźliśmy iuż wyżéy ftyczną

$$ACD=Sty.A'=\frac{b'm(rn-sm)}{r+b'n(rn-sm)},$$ s kąd wypádá

$$W\!ft.A'=\frac{b'm(rn-sm)}{\sqrt{[r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(rn-sm)^2]}};$$

$$r^2+2b'rn(rn-sm)+b'^2(rn-sm)^2=\frac{b'^2m^2(rn-sm)^2}{W\!ft.A'^2},$$

włożywfzy tę wártość w mianownika 2go członka zrównaniá (D); i przetłómaczywfzy litery wfzyftkié na wftawy i doftawy kątów wprowadzonych, to zrównanie ftanie fię:

$$\frac{W\!ft.(q+B')^2+b'.W\!ft.B'^2.}{W\!ft.q^2}z^2+ \text{ - - - - }$$
$$\frac{(W\!ft.(q+B')^2+b'W\!ft.B'^2)W\!ft.A'^2}{b'W\!ft.q^2.W\!ft.B'^2}w^2-a'=o \text{ - - } (D).$$

pamiętáymy iefzcze o wártościach wydobytych z zrównaniá (γ) na a', b', że na fig. 21. $a'=k^2=CE^2$; Fig. 21.

$b'=\frac{k^2}{g^2}=\frac{CE^2}{CG^2}$. Zrównanié na $fty.A'$, daie nám

Cô $b'=$

$$b' = \frac{Sty.A'.Wſt.p.}{Wſt.B'(Wſt.q - Sty.A'Doſt.q)} = \frac{k^2}{g^2} = \frac{CE^2}{CG^2},$$ czyli

$$\frac{k^2}{g^2} = \frac{Wſt.A'.Wſt.(q+B')}{Wſt.B'.Wſt.(q-A')} \quad - \quad - \quad (L).$$

(L) zamyká w ſobie związek między dwiéma śrzednicami ſprzężonémi. Ieżeli w zrównaniu (D), $CD = w = o$; DM zamiéni ſię na $CH = z$, i (D) da nám z

czyli $$CH = \frac{CE.CG.Wſt.q.}{\sqrt{[CG^2 Wſt.(q+B')^2 + CE^2.Wſt.B'^2]}};$$

II. Własność śrzednic. uczyniwſzy podobnie w (D) $z = o$, wypadnie wártość na $w = CR$

$$CR = \frac{CE^2.Wſt.q.Wſt.B'}{Wſt.A'\sqrt{[CG^2 Wſt.(q+B')^2 + CE^2.Wſt.B'^2]}};$$ więc

$$\frac{CR}{CH} = \frac{CE.Wſt.B'}{CG.Wſt.A'} \cdot\cdot\; CG.Wſt.A'.CR = CE.Wſt.B'.CH \quad (1).$$

to oſtatnié zrównanié nás uczy, że złączywſzy przez linią proſtą punkta E, H; podobnie znowu punkta G, R, troykąt GRC = troykątowi ECH.

$$\frac{CR}{CH} = \frac{CE^2.Wſt.B'}{CE.CG.Wſt.A'},$$ włożywſzy z zrównániá (L) w teraźniéyſzé, wártość na - - $CE^2 = k^2$

$$= \frac{CG^2.Wſt.A'.Wſt.(q+B')}{Wſt.B'Wſt.(q-A')};$$ wypadnie - - - $\frac{CR}{CH}$

III. Własność śrzednic. $$= \frac{CG.Wſt.(q+B')}{CE.Wſt.(q-A')} \cdot\cdot\cdot\; CR.CE.Wſt.(q-A') = CH.Wſt.(q+B').CG \quad - \; - \; - \quad (2)$$

to ieſt: że złączywſzy znowu punkta R, E; tudzież punkta G, H, będzie w każdéy linii 2go porządku troykąt RCE = troykątowi GCH.

Srzednice CR, CH, wyraziliśmy przez ułomek, którego mianownik $CG^2 Wſt.(q+B')^2 + CE^2 Wſt.B'^2$ =

$$\frac{CG^2.Wſt.(q+B')}{Wſt.(q-A')}[Wſt.(q+B')Wſt.(q-A') + Wſt.A'.Wſt.B']$$

$$= \frac{CG^2.Wſt.q.Wſt.(q+B').Wſt.(q+B'-A')}{Wſt.(q-A')};$$ drugi członek

członek tego zrównaniá wypádá, włożywszy za CE^2 wártość wyciągnioną z (L); trzeci zaś, wykonáwszy mnożenie funkcyi między nawiasami kwadrátowemi, i położywszy náprzód za $Dost.q^2 = 1 - Wst.q^2$; powtòre za $Wst.q.Dost.(B'-A') + Dost.qWst.(B'-A') = Wst.(q+B'-A')$: Ostatnią tę mianownika wártość włożywszy w CH, otrzymámy:

$$CH = CE \sqrt{\left[\frac{Wst.q.Wst.(q-A')}{Wst.(q+B')Wst.(q+B'-A')}\right]} \quad - - (Q).$$

włożywszy ią zaś w CR, będzie $CR = \frac{CG.Wst.(q+B')}{Wst.(q-A')}$.

$\sqrt{\left[\frac{Wst.(q-A').Wst.q.}{Wst.(q+B')Wst.(q+B'-A')}\right]}$: s kąd wypádá

IV. właśność śrzednic.

$$CR.CH = \frac{CG.CE.Wst.q}{Wst.(q+B'-A')} \text{ czyli}$$

$$CK.CH.Wst.(q+B'-A') = CG.CE.Wst.q \quad - - - (3).$$

to ostatnie zrównanie nás uczy, że złączywszy przez linie proste punkta R, H; G, E; troykąt $RCH =$ troykątowi GCE. Mámy więc

z (1) Tróykąt $GCR =$ tróykątowi ECH.
(2) Tróykąt $RCE =$ tróykątowi GCH.
(3) Tróykąt $RCH =$ tróykątowi GCE.

Aże Trapez $RGCE = \triangle GCR + \triangle RCE$.
Trapez $EHCR = \triangle EHC + \triangle RCE$.

więc Trapez $GRCE =$ trapezowi $EHCR$. Oprócz tego trapez $EHCR - \triangle RCH =$ trapezowi $GRCE - \triangle GCE$; przeto tróykąt $ERH =$ tróykątowi RGE, które maiąc spólną zasadę RE, dowodzą, że cięciwa RE iest równoległą cięciwie GH i $\triangle RHG = \triangle EGH$. Ponieważ zaś

V. właśność śrzednic.

Trapez $RGCH = \triangle RHG + \triangle GCH$,
Trapez $GEHC = \triangle EGH + \triangle GCH$,

więc Trapez $RGCH =$ trapezowi $GEHC$.

Każde s tych zrównań pokazuie nám nową właśność śrzednic sprzężonych w liniach 2go porządku, i oráz związek iednych z drugiemi. Ten związek w funkcyach kątów między śrzednicami zawartych náylepiey nám tłomaczą zrównaniá (L),(Q). §.XI.

§. XI.

Spoſób prowadzeniá ſtycznych wydobywá ſię z własności śrzednic.

Fig. 23.

Zatrudniymy ſię ieſzcze roſtrząſaniém zrównań (L) i (Q), ſtóſuiąc ié do fig. 23, gdzie GC, CH, ſą dwie śrzednice ſprzężoné; CM, CK, dwie drugié, kąt $GCH=q$; $MCG=A'$; $HCK=B'$; $GCK=p=q+B'$; $MCH=q-A'$; $MCK=q+B'-A'$; zrównanié (Q) daie nám w teraźnieyſzéy figurze - - - $\frac{CM^2}{CG^2}=$ - - $\frac{Wſt.q.Wſt.(q+B')}{Wſt.(q-A').Wſt.(q+B'-A_{,})}$; zrównanie zaś (L) - - $\frac{HC^2}{GC^2}=\frac{Wſt.A'.Wſt.(q+B')}{Wſt.B'.Wſt.(q-A')}$; - - - $\frac{HC^2+GC^2}{GC^2}=\frac{Wſt.q.Wſt.(B'+A')}{Wſt.B'.Wſt.(q-A')}$: s tegóż ſamégo zrównaniá (L) wyciągámy $\frac{CK^2}{CM^2}=\frac{Wſt.A'.Wſt.(q-A')}{Wſt.B'.Wſt.(q+B')}$; $\frac{CK^2+CM^2}{CM^2}$ $\frac{Wſt.A'.Wſt.(q-A')+Wſt.B'.Wſt.(q+B')}{Wſt.B'.Wſt.(q+B')}$; chcąc oſtatniego ułomku licznika przerobić, przypomniymy ſobie z Algebry wzory pod §§.51, 54.

$$Wſt.a.Wſt.b=\tfrac{1}{2}Doſt.(a-b)-\tfrac{1}{2}Doſt.(a+b)$$

$$\tfrac{1}{2}Doſt.b-\tfrac{1}{2}Doſta.=Wſt.\frac{a+b}{2}.Wſt.\frac{a-b}{2}$$

któré ſtóſuiąc do oſtatniégo zrównaniá; otrzymámy:

$$Wſt.A'.Wſt.(q-A')=\tfrac{1}{2}Doſt.(q-2A')-\tfrac{1}{2}Doſt.q$$

$$Wſt.B'.Wſt.(q+B')=\tfrac{1}{2}Doſt.q-\tfrac{1}{2}Doſt.(q+2B).$$

przeto $Wſt.A'.Wſt.(q-A')+Wſt.B'.Wſt.(q+B')=\tfrac{1}{2}Doſt.(q-2A')-\tfrac{1}{2}Doſt.(q+2B')=Wſt.(q+B'-A').Wſt.(B'+A')$; $\frac{CK^2+CM^2}{CM^2}=\frac{Wſt.(q+B'-A').Wſt.(B'+A')}{Wſt.B'.Wſt.(q+B')}$, s kąd wypáda $\frac{HC^2+CG^2}{CK^2+CM^2}=$ - - - - - $\frac{GC^2}{CM^2}$. $\frac{Wſt.q.Wſt.(q+B')}{Wſt.(q-A')Wſt.(q+B'-A')}$, aże

Wſt.

$$\frac{Wſt.q.Wſt.(q+B')}{Wſt.(q-A').Wſt.(q+B'-A')}=\frac{CM^2}{CG^2}, \text{ więc}$$

VI. Włáſność ſrzednic.

$$HC^2+CG^2=CK^2+CM^2.$$

to ieſt: że w każdéy linii *2go* porządku ſumma kwadratów z dwóch ſrzednic ſprzężonych ieſt nieodmienną. S téy właſności wypádá nám ſpoſób prowadzeniá ſtycznych do iakiegokolwiek punktu linii krzywéy. Chcąc n.p. prowadzić ſtyczną do punktu *M*, a maiąc dwie ſrzednice ſprzężoné *CG*, *CH*, wiadomé; biorę linią *CM* za ſrzednicę, któréy odpowiadaiącá ſrzednica ſprzężoná *CK*, ieſt równo-ległą ſtycznéy *MT*: cały więc ſpoſób zawiſł od wynalezieniá *CK*, która z oſtatniégo zrównaniá wypádá.

$$CK=\sqrt{[HC^2+CG^2-CM^2]}$$

Inny ieſzcze ſpoſób na wynalezienie *CK* podaie nám §. poprzédzaiący. Wiémy bowiem że cięciwa prowadzoná od *H* do *M*, ieſt równo-legła cięciwie *KG*, co nám pokazuie mieyſce na linii krzywéy, od którégo CK má bydź prowadzoná do ſrzodka *C*.

§. XII.

Srzednice równaią ſię s ſtycznémi i stąd wyciągaią ſię dalſzé właſności ſrzednic.

Fig. 23.

Przeciągniymy ſrzednicę *CG* póki nie przetnie ſtycznéy w miéyſcu *T*, a poprowadziwſzy od *M* linią *MN* równo-ległą *HC*, otrzymámy dwa tróykąty *PMC*, *MTC*: w pierwſzym kąt $MPC=180°-MPG$. Wſtawa więc kąta $MPC=Wſt.MPG=Wſt.HCG=Wſt.q$; $Wſt.CMP=Wſt.HCM=Wſt.(q-A')$, $Wſt.MTC=Wſt.TCD=Wſt.KCG=Wſt.(q+B')$; $Wſt.CMT=Wſt.KCM=Wſt.(q+B'-A')$; a przeto

$$MC:MP=Wſt.q:Wſt.A' \;-\;-\; Wſt.q=\frac{MC.Wſt.A'}{MP};$$

$$MP:CP=Wſt.A':Wſt.(q-A');\; Wſt.(q-A')=\frac{CP.Wſt.A'}{MP}$$

$$CM:CT=Wſt.(q+B'):Wſt.(q+B'-A');\; Wſt.(q+B'-A')=\frac{CT.Wſt.(q+B')}{CM}$$

CM:

$CM:MT = Wst.(q+B'):Wst.A'$; $Wst.(q+B') = \frac{Wst.A'.CM}{MT}$

włożywszy te wártości wstáw w zrównanie (Q), otrzymámy:

$\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{CM^2}{CP.CT}$, to iest $CG^2 = CP.CT$, czyli

(1) $CP:CG = CG:CT$

$CP:CG-CP = CG:CT-CG$, czyli

(2) $CP:PG = CG:GT$

$CP:CP+CI = CG:CT+CG$, to iest:

(3) $CP:IP = CG:IT$.

więc wziąwszy znowu BN, EF, za dwie śrzednice sprzężone, i przeciągnąwszy pierwszą póki nie przetnie śrzednicy w mieyscu A, a od M spuściwszy MQ równo-ległą CE, i tym do punktów N,B, poprowadziwszy styczne równo-ległe, trzy ostatnie proporcye uczą nás, że:

(1) $CQ:CN = CN:CA$.

(2) $CQ:QN = CN:NA$ - - $NA = \frac{CN.QN}{CQ}$

(3) $CQ:BQ = CN:BA$ - - - $BA = \frac{CN.BQ}{CQ}$

s podobieństwa zaś tróykątów NTA, MQA, LBA, wypádá:

$AN:QA = NT:QM$ - - - (δ).

$BA:QA = BL:QM$ - - - (ε):

$QA = QN + NA = QN + \frac{CN.QN}{CQ} = \frac{BQ.QN}{CQ}$, więc

$NA:QA = CN:BQ = NT:QM$ - - - z (2), (δ)

$BA:QA = CN:QN = BL:QM$ - - - z (3), (ε)

$NT = \frac{CN.QM}{BQ}$ - - $BL = \frac{CN.QM}{QN}$; - - $NT.BL \frac{CN^2.QM^2}{BQ.QN}$;

VII. Włásność śrzednic. aże podług włásności drugiey w §. 8. $QN.BQ:QM^2 = CN^2:CE^2$, s kąd $CE^2 = \frac{QM^2.CN^2}{QN.BQ}$ $CE^2 = NT.BL$

to iest:

NT

$NT:CE=CE:BL.$

w linii 2go porządku śrzednica ieſt śrzednią proporcyonalną między dwiéma ſtycznemi iey równo-ległémi. Z zrównań na NT, BL, CE^2, między ſobą kombinowanych wypádá ieſzcze:

$NT^2.BQ^2=CE^2.QN.BQ$ - - - $NT=CE\sqrt{\frac{QN}{BQ}}$;

$BL^2.QN^2=CE^2.QN.BQ$ - - - $BL=CE\sqrt{\frac{BQ}{QN}}$, a przeto

$QN:BQ=NT^2:CE^2=CE^2:BL^2=TM:ML=NT:BL$; i poprowadziwſzy do punktu V ſtyczną SR; przecinaiącą NT, BL, w punktach R, S; będzie także CE śrzednią proporcyonalną między NR, i BS.

Wſzyſtkié dotąd wyłożoné włáſności daią nám ſpoſób wyráženiá śrzednic ukośnych iednych przez drugié; chcąc od nich przyiśdź do poznaniá śrzednic pionowych, potrzeba kąt MCK wziąść za kąt proſty, i do niégo ſtóſownie odmieniwſzy inné kąty, wprowadzić im odpowiadaiącé wſtawy w zrównaniá (L), (Q); będzie zaś kąt $MCK=q+B'-A'=90°$, iego wſtawa $=1$; czyli $B'=90°-(q-A')$; $Wſt.B'=Doſt.(q-A')$; $B'+q=90°+A'$; $Wſt.(B'+q)=Doſt.A'$; wprowadziwſzy té wártości wſtáw w zrównaniá (L), (Q), piérwſzé z nich zamieni ſię na:

$$\frac{HC^2}{GC^2}=\frac{Wſt.A'.Doſt.A'}{Doſt.(q-A')Wſt.(q-A')}=\frac{Wſt.2A'}{Wſt.2(q-A')}=$$

$$\frac{1}{Wſt.2q.Doſty.2A'-Doſt.2q}$$; zrównanie zaś (Q) ſtanie ſię $\frac{CM^2}{CG^2}=\frac{Wſt.q.Doſt.A'}{Wſt.(q-A')}=1-\frac{1}{Doſty.q.Sty.A'}$

$=1-\frac{Sty.q}{Sty.A'}$; aže zrównanie (3) pod §.10. daie nám $CM.CK=CG.CH.Wſt.q$; i znowu włáſność VI śrzednic $CH^2+CG^2=CM^2+CK^2$; $(CM+CK)^2-2CK.CM=CH^2+CG^2$; $(CM-CK)^2+2CK.CM=CM^2+CK^2=CH^2+CG^2$

 włoży-

włożywszy za $CK.CM.$ iego wártość, otrzymámy:

$$CM+CK=\surd[CG^2+CH^2+2CG.CH.Wſt.q]$$

$$CM-CK=\surd[CG^2+CH^2-2CG.CH.Wſt.q]$$

Fig. 20. te dwa zrównania daią nám CM, CK, w funkcyi CG, CH. Srzednice do ſiebie pionowe iakie ſą CM, CK, albo na fig. 20. GI, BE nazywaią ſię GŁÓWNEMI (*Diametri principales*). Zrównanie (C') w §. 10. właśnie ſłuży wſpół-uſzykowanym na takowych śrzednicach rachowanym $y^2=\frac{k^2}{g^2}(g^2-x^2)$; w niém x, y, będąc w ſamych potęgach drugich nie odmienią nic ſtáwſzy ſię z dodatnych odiemnémi, i przeciwnie; co dowodzi, że liniá krzywá przedzieloná takiémi śrzednicami ieſt w ſwoim ryſunku i wielkości ze wſzyſtkich ſtrón równá, czyli że odnoga nad GI równá odnodze pod GI, i odnoga położoná z iednéy ſtrony BE ieſt równá odnodze położonéy z drugiéy ſtrony BE; to ieſt: że dwie śrzednice główné linią krzywą opiſaną zrównaniém (C') rościnaią na cztéry części równé i podobné. Tu pokazuie ſię ſpoſób dochodzeniá w liniach iakichkolwiek porządków wyżſzych, czyli té maią śrzednice lub nie? o czém nám niżéy mówić przypadnie. Pociągnąwſzy s śrzodka C do M linią CM, iéy wártość będzie $\surd(x^2+y^2)=\surd[x^2+\frac{k^2}{g^2}(g^2-x^2)]$, a położywſzy $k=g$, wypádá $CM=g$, to ieſt że w linii 2go porządku maiącéy dwie śrzednice ſobie równé, liniá proſtá s śrzodka do iakiégokolwiek punktu obwodu pociągnioná, wyrazić ſię może wymiernie, i ieſt ilością ſtateczną, która to włáſność ſłuży kołu. Ale kiedy dwie śrzednice główné ſą nierówné, liniá prawda CM ieſt zawſze funkcyą niewymierną; ale niemaſzli na śrzednicy GI iakiégo punktu tą włáſnością znakomitégo? Na rozwiązanie tego pytaniá, przypuśćmy że F ieſt takowym punktém, od którégo liniá prowadzoná do M ieſt funkcyą wymierną: potrzeba nám więc wynaleśdź $CF=f$, ponieważ

waż

waż $CP=x$, $PM=y$, będzie $FP=f-x$; $FM^2=(f-x)^2$ $+y^2=(f-x)^2+\frac{k^2}{g^2}(g^2-x^2)$, czyli - - - $FM^2=$ $\frac{x^2(g^2-k^2)-2fg^2x+(f^2+k^2)g^2}{g^2}$, żeby więc FM było funkcyą wymierną, potrzeba żeby licznik ostatniego ułomku był zupełną potęgą drugą, a przeto $\frac{f^2g^4}{(g^2-k^2)^2}$ $=\frac{(f^2+k^2)g^2}{g^2-k^2}$, rozwiązawszy to ostatnie zrównanie znaydziemy $f^2=g^2-k^2$, $f=\pm\sqrt{(g^2-k^2)}$, ponieważ f ma dwie wartości równe, iednę dodatną a drugą odiemną; punktów takowych znayduie się dwa w równey odległości z obydwóch stron śrzodka C. Ale że wartość na f nie może bydź rzetelną tylko kiedy $g>k$, punkta takowe nie mogą się znaydować tylko na śrzednicy większey, i są tem odleglêysze od śrzodka C, im różnica dwóch osi GC, BC iest większą, to iest, im linia krzywa iest dłuższą a węższą. Punkta te nazywaią się OGNISKAMI (*Foci curvae*). Ponieważ trafiamy na te punkta biorąc śrzednicę GI za oś, dla tego ta nazywa się osią większą albo osią POPRZECZNĄ (*Axis major, transversus*), druga śrzednica BC nazywa się OSIĄ MNIEYSZĄ SPRZĘŻONĄ, (*Axis minor, conjugatus*). Punkta G, I, nazywaią się WIERZCHOŁKAMI (*Vertices*) u których styczne są zawsze równoległe BC. Włożywszy wartość odkrytą na f w FM, wypadnie $FM=g-\frac{x\sqrt{(g^2-k^2)}}{g}$; $GM=g+\frac{x\sqrt{(g^2-k^2)}}{g}$; weźmy teraz za odcinek $CF=x=\pm\sqrt{(g^2-k^2)}$, i włożywszy tę wartość za x w zrównanie (C') wypadnie $y=\frac{k^2}{g}=FR$, to iest, że przystawa z ogniska prowadzona pionowo iest ilością stateczną, i trzecią proporcyonalną między dwiema osiami głównemi. Podwóyna taka przystawa czyli cięciwa RS nazywa się

Własności ognisk i linii z nich wychodzących.

Fig. 20.

się MIARĄ albo LINIĄ RÓWNANIA (*Parameter, latus rectum*), dlá tego, że służyć może za miarę porównywaniá, czyli za iedność wpsół-uszykowanym. Nazwiymy teráz odległość ogniska od wierzchołka $FG=d$, $FR=\frac{k^2}{g}=c$, mámy $f=g-d=\sqrt{(g^2-gc)}$, a przeto $g=\frac{d^2}{2d-c}$; $k=d\sqrt{\frac{c}{2d-c}}$; maiąc znane c, d, mámy wszystko w linii krzywéy wiadomé.

Zrównanie biegunowe na linie 2go porządku.

Maiąc iuż obydwie osi wyrażoné, przez odległość ogniska od wierzchołka d, i przez miarę równaniá c, łatwo nám iest bárzo linią iakąkolwiek FM przez c i d wyrazić, a wciągnąwszy ieszcze kąt GFM, który ta liniá czyni z osią, odkryć zrównanie między FM, i tymże kątem; a náprzód poniewáż $FM=g-\frac{x\sqrt{(g^2-k^2)}}{g}=g-\frac{x(g-d)}{g}$, kładąc za g, wartość znalezioną $\frac{d^2}{2d-c}$; będzie $g-d=\frac{dc-d^2}{2d-c}$; $FM=\frac{d^2}{2d-c}-\frac{(c-d)x}{d}$; nazwawszy $FP=z$, będzie $x=CF-z=\frac{(c-d)d}{2d-c}-z$, włożywszy w FM tę wártość za x, otrzymámy $FM=c+\frac{(c-d).z}{d}=c-\frac{(d-c)z}{d}$. Niech teráz będzie kąt $GFM=v$, przeto $z=-FM.\ Dost.v.$ włożywszy tę wártość za z w FM, i nazwáwszy $FM=r$, otrzymámy zrównanie:

$$r=\frac{dc}{d-(d-c)Dost.v.} \quad - - - (Aa).$$

to zrównanie zamyká dwié ilości r, kąt v; które wziąwszy za ilości odmienné, wyrażémy nowym sposobém wszystkie gatunki linii 2go porządku. Należy

leży nám tu ostrzédz, że (Aa) iest zrównaniém náywaźnieyszém, i náywiększégo użyciá w Astronomii, gdzie ié nazywać zwykli ZRÓWNANIEM BIEGUNOWEM (*Aequatio Polaris.*)

I téż to są właśności powszechné wszystkim liniom 2go porządku, których użył Newton do rachowaniá biegu ciał Niebieskich, w swém nieśmiertelném dziele: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, a które J. P. Euler wyciągnął z uwág ogólnych zrównania 2go stopnia między dwiéma odmiennemi x, y, sposobém tu od nás użytym.

§. XIII.

Gatunki linii krzywych 2go porządku.

Po wyłożonych ogólnych właśnościach wszystkich linii 2go porządku, przypádá nám poznać różné ich gatunki za pomocą szczególnych warunków wprowadzonych w zrównanie (β). §. 10. $y^2 = n + px + qx^2$. Aże nátura i rysunek linii krzywych zawisł od natury pierwiástków zrównaniá (β); té zaś pierwiástki od stanu i wártości ilości státecznych n, p, q; idzie za tém, że warunki pewné przywiązané do tych ilości stálecznych, dadzą początek różnym gatunkóm linii 2go porządku. Nie zapominaymy iesczce o tém, że px bydź może wyrzucone, bez narusżeniá natury zrównaniá; że n w swym znaku zawisło od q, iako dzielnika, że na koniec x odmieniaiąc się dosiąc może iakichkolwiek wártości nadanych n, q: a przeto że gatunków różnych linii krzywych nie náleży nám upatrywać tylko w różnych znakach q, albo w iego zniszczéniu. Biorąc więc q za odiemné, dodátné, lub zeró; wypádáć nám powinny linie krzywé 2go porządku, każdému warunkowi odpowiadaiącé. Zaczniymy od q odiemnégo, a odniosszy początek odcinków do śrzodka, czyli uczyniwszy $x = x + \frac{p}{2q}$, otrzymámy zrównanie

$$y^2 = b - qx^2$$

 gdzie

Ellipsa i iéy własności. gdzie $b=n+\frac{p^2}{4q}$; chcąc poznać rysunek linii tém zrównaniém opisanéy, uważáymy náprzód czyli má odnogi nieskończoné lub nie? to iest, czyli przeszedłszy przez wszystkié wzrosty x, wártości na y wypadną rzetelné lub uroioné. Ponieważ q iest odiemném, $-qx^2$ nieprzestanie nigdy bydź odiemném; a przeto y nie będzie rzetelném, tylko kiedy $b>qx^2$, czyli $x<\sqrt{\frac{b}{q}}$, liniá więc krzywá skończy się na odcinku równym $\sqrt{\frac{b}{q}}$ wziętym z obudwóch stron osi, a przeto nie má żádnéy odnogi nieskończonéy.

Fig. 24. Wziąwszy więc na fig. 24. S za śrzodek linii krzywéy i początek odcinków razém, $SA=\sqrt{\frac{b}{q}}$, $SB=-\sqrt{\frac{b}{q}}$; ponieważ na $x=\pm\sqrt{\frac{b}{q}}$, $y=o$, liniá krzywá przeciąwszy oś w punktach A, B, skończy się na nich. Uważmy ieszcze iak daleko u S przystawy się rościągną: w miéyscu S, $x=o$, $y=\pm\sqrt{b}$, to iest że przystawa u S iest ilością stateczną skończoną, a przeto wziąwszy $CS=SD=\sqrt{b}$, liniá krzywá zamknie się między cztérémá punktami A, B, C, D, czyli między dwiema śrzednicami AB, CD, którą nazwano ELLIPSA (*Ellipsis*). Widzieliśmy dopiéro że SA, SC, są funkcyami ilości statecznych b, q, wchodzących w zrównanie: niech będzie $SA=g=\sqrt{\frac{b}{q}}$, $SC=k=\sqrt{b}$, przeto $b=k^2$, $q=\frac{k^2}{g^2}$, i zrównanie na Ellipsę zamieni się na inné:

$$y^2=\frac{k^2}{g^2}(g^2-x^2) \quad - \; - \; - \; (A).$$

gdzie SA, SC, które odtąd nazywać będziemy półosiami Ellipsy, będą ilościami statecznemi zrównaniá.

W §. 12.

W §. 12. znaleźliśmy dwa ogniſka na linié 2go porządku, czyli $f=\pm\sqrt{(g^2-k^2)}$ które znayduią ſię w każdéy linii maiącéy dwie śrzednice nierówné, a przeto w Ellipſie: im g większé będzie od k, tém SF czyli f będzie dalſze od śrzodka; a przeto Ellipſa dłużſzá: im zaś g będzie ſię barziéy zbliżać do k, tém punkta F, G, padną bliżéy śrzodka, i kiedy $g=k$, $f=o$, zrównanie zaś (A) ſtanie ſię $y^2=g^2-x^2$ zrównaniém na koło; podług więc większéy lub mniéyſzéy odległości punktów F, G, od śrzodka S, którą to odległość nazywać będziémy Mimo-śrzód *(Excentricitas)*; Ellipſa oddála ſię lub zbliża do koła. Staráymy ſię náſámprzód poznać własności Ellipſy przez linie wychodzącé z iéy ogniſk i śrzodka. Ponieważ $SF=\sqrt{(g^2-k^2)}$, $PF=\sqrt{(g^2-k^2)}-x$, $FM^2=y^2+[\sqrt{(g^2-k^2)}-x]^2$, gdzie za y włożoná wártość z zrównaniá (A), uczyni $FM=g-\frac{x\sqrt{(g^2-k^2)}}{g}$;

$GM=g+\frac{x\sqrt{(g^2-k^2)}}{g}$, a przeto $FM+GM=2g=AB$; to ieſt: *Że ſumma linii z ogniſk do iakiégokolwiék punktu Ellipſy prowadzonych, ieſt równá osi większéy.* Pierwsza własność Ellipsy.

Poprowádźmy do tego ſamégo punktu M ſtyczną MT: §. 12. nauczył nás, że $SP:SA::SA:ST$, to ieſt,

$ST=\frac{g^2}{x}$; $GT=\frac{g^2+x\sqrt{(g^2-k^2)}}{x}$, $FT=\frac{g^2-x\sqrt{(g^2-k^2)}}{x}$,

ſtóſuiąc wártości na FT, FM; GT, GM, otrzymámy:

$FT:FM=g:x$ - - $GT:GM=g:x$ więc

$FT:FM=GT:GM$ to ieſt: $\frac{W\!ſt.FMT}{W\!ſt.ETM}=\frac{W\!ſt.GMQ}{W\!ſt.FTM}$,

$W\!ſt.FMT=W\!ſt.GMQ$: czyli *dwie linie proſté z ogniſk do którégokolwiek punktu Ellipſy prowadzoné, równo ſą nachyloné do ſtycznéy tego punktu.* Druga własność Ellipsy.

Aże znowu $GT:GM=g:x$; $ST:SA=g:x$ - - - $GT:GM=ST:SA$, poprowadziwſzy zaś z śrzodka S,

SR równo-ległą GM, tróykąty GMT, SRT, dadzą GT: $GM = ST:SR$, a przeto $SR = SA$, znáydziemy przez podobne rozumowanie $SQ = SR = SA$, to ieſt: *że linie s śrzodka do ſtyczney prowadzone równo-ległe liniom wychodzącym z ogniſk, ſą ſobie, i połowie osi większéy równe: tak dalece: że* $FM + GM = SR + SQ = AB$. TRZECIA WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Staráymy ſię teráz wynaleśdź wártość na TM przez funkcyą ilości wchodzących w zrównanie na Ellipſę. Ponieważ $ST = \frac{g^2}{x}$, $PT = \frac{g^2 - x^2}{x}$; włożywſzy wártość licznika wyciągnioną z (A), otrzymámy $PT = \frac{y^2 g^2}{k^2 x}$, a przeto $TM = \sqrt{(TP^2 + PM^2)} = \frac{y\sqrt{(k^4x^2 + g^4y^2)}}{k^2 x}$; zrównanie zaś (A) na Ellipſę daie $g^4y^2 = k^2g^4 - k^2g^2x^2$; co włożywſzy w wártość na ſtyczną; otrzymámy $TM = \frac{y}{kx}\sqrt{[g^4 - x^2(g^2 - k^2)]} = \frac{y}{k}\sqrt{(FT.GT)}$; s kąd $GT = \frac{TM^2.k^2}{FT.y^2}$; $PT = \frac{y^2.ST}{k^2}$; przeto $GT = \frac{TM^2.ST}{PT.FT}$: mámy zaś s podobieńſtwa tróykątów $TG:TS = TM:TR$ - - $TR = \frac{TM.TS}{GT}$, włożywſzy za GT wártość dopiero znalezioną, wypadnie - - $TR = \frac{FT.PT}{TM}$, to ieſt: $TM:PT = FT:TR$, więc tróykąty PMT, RFT, ſą ſobie podobne, i kąt FRT ieſt kątem proſtym: przez tenże ſám ſpoſób doydziemy że i kąt GQT ieſt proſtym. Ta właſność uczy nás wynaydować geometrycznie obydwa ogniſka w Ellipſie maiąc śrzodek i ſtyczną: poprowadziwſzy bowiem z śrzodka S, do ſtyczney linie SR, SQ, ſobie i połowie

osi

osi większéy równé, potém s punktów R, Q, spuściwszy dwie pionowé, té przéydą koniecznie przez ogniska F, G; co czyni Czwartą własność Ellipsy.

Równáymy teráz tróykąty podobné FRT; PMT; SQT; dlá wynalezieniá wártości na FR, GQ, będzie naprzód:

$$TM:PM = FT:FR \text{ - - } FR = \frac{FT.y}{TM}$$

$$TM:PM = TG:GQ \text{ - - } GQ = \frac{TG.y}{TM}$$

w té ostatnié zrównaniá włożywszy wártość wyżéy znaleziona na TM, wypadnie $FR = k\sqrt{\frac{FT}{GT}}$ - - - - -

$GQ = k\sqrt{\frac{GT}{FT}}$, a przeto $FR.GQ = k^2 = CS^2$ to iest: *że oś mniéyszá Ellipsy iest śrzednią proporcyonalną między dwiema pionowémi spuszczonémi s styczněy do ognisk.* Piąta własność Ellipsy.

Ieżeli ieszcze s śrzodka spuszczémy na styczną, pionową SL, ta náprzód rozdzieli tróykąt SRQ na dwa równo-boczné, i równo-kątné podług właśności III: powtóre uczyni tróykąt STL podobny każdému s trzech uważanych w poprzédzaiącéy właśności: przeto

$$FT:FR = ST:SL \text{ - - } SL = \frac{ST.FR}{FT} = \frac{k.ST}{\sqrt{FT.GT}},$$ po-

przédzaiącá zaś właśność dała $FR = \frac{k.FT}{\sqrt{FT.GT}}$, prze-

to $SL - FR = \frac{k.SF}{\sqrt{FT.GT}} = SN$, s kąd otrzymámy:

$$SL + SN = \frac{k.GT}{\sqrt{(FT.GT)}};\quad SL - SN = \frac{k.FT}{\sqrt{(FT.GT)}},$$ a prze-

to $SL^2 - SN^2 = k^2 = SC^2$, - - $SN = \sqrt{(SL^2 - SC^2)}$, zrównanié na wynalezienié punktu N, s którégo spuszczoná liniá pionowá FN, przéydzie przez ognisko.

Gdybyśmy punkt P przenieśli do ogniſka; a punkt M, na przyſtawę pionową wychodzącą z F; byłoby $x=\sqrt{(g^2-k^2)}$; $x^2=g^2-k^2$; co włożywſzy w zrównanie (A) na Ellipſę, otrzymamy $y=\frac{k^2}{g}$, wartość na LINIĄ RÓWNANIA (*Parameter*). Ta liniá daie nam związek obydwóch osi w Ellipſie, które ſą iey śrzednicami razem: własność II. Ellipſy odkryła nam znowu związek między AS, FM, GM; maiąc zaś na pamięci §§. 10. 11. możemy ten związek przenieść do innych śrzednic iakichkolwiek. A naprzód wiemy z własności ogólnych linii 2*go* porządku, że pociągnąwſzy z śrzodka do punktu M linią SM, i tę wziąwſzy za śrzednicę; liniá SK równo-ległá ſtyczney TM, będzie iey śrzednicą ſprzężoną: Nazywam $SM=p$, $SK=q$, kąt $KSM=\phi$, mamy s §. 11. - - $p^2+q^2=g^2+k^2$; z §. 10. zró. (3) - - $gk=pq.W\!ſt.\,\phi$ aże $p^2=x^2+y^2=k^2+\frac{(g^2-k^2)x^2}{g^2}$; $q^2=g^2+k^2-p^2=g^2-\frac{x^2(g^2-k^2)}{g^2}=FM.GM$, znaydziemy przez podobne rozumowaniá że $p^2=FK.GK$, to ieſt: *że śrzednica każda w Ellipſie, ieſt śrzednią proporcyonalną między dwoma liniami wychodzącémi z ogniſk do punktu iey śrzednicy ſprzężoney na Ellipſie.* SZOSTA WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Aże pod właſ. I. II. $FM.GM=\frac{x^2}{g^2}FT.GT$, przeto $SK=q=\frac{x}{g}\sqrt{(FT.GT)}$. Związek wſpół-uſzykowanych w zrównaniu na Ellipſę (A), wyrażony ieſt przez funkcyą dwóch osi SA, SC; maiąc teraz wyráz osi nowych SM, SK, przez pierwſze; nie będzie nam trudno wynaleśdź wartości x, y, przez funkcyą SM, SK; stąd zaś wyciągnąć wartość na KI równo-

ległą

ległą MP. Pamiętáymy tylko że $TM = \frac{y}{k}\sqrt{FT.GT}$; $PT = \frac{y^2 g^2}{k^2 x}$; i że tróykąty TMP, SKI, są sobie podobné: przeto

$$TM:MP = SK:KI \ \text{- -} \ KI = \frac{SK.y}{TM} = \frac{kx}{g}$$

$$TM:TP = SK:SI \ \text{- -} \ SI = \frac{SK.TP}{TM} = \frac{gy}{k}$$

skąd wypádá, $KI.SI = xy = SP.PM$: to iest: *że do dwóch punktów Ellipsy leżących na środnicach sprzężonych poprowadziwszy wspoł-uszykowané, mnogość iednych, iest równa mnogości drugich, czyli przystawy są w stósunku spacznym do odcinków*. SIODMA WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Wróciwszy się do zrównań pod własnością VI, $p^2 = k^2 + \frac{(g^2-k^2)x^2}{g^2}$; $p^2 = x^2 + y^2$; wyciągniémy s piérwszego $x = \frac{g\sqrt{(p^2-k^2)}}{\sqrt{(g^2-k^2)}}$; z drugiégo $y = \frac{k\sqrt{(g^2-p^2)}}{\sqrt{(g^2-k^2)}}$; a przeto $KI = \frac{kx}{g} = \frac{k.\sqrt{(p^2-k^2)}}{\sqrt{(g^2-k^2)}}$; $SI = \frac{gy}{k} = \frac{g\sqrt{(g^2-p^2)}}{\sqrt{(g^2-k^2)}}$, skąd poznámy kąty PSM, KSI, w funkcyach samych osi.

Zostawiliśmy na końcu §. 12. zrównanié (Aa) na wszystkié linie 2go porządku, chciéymy ié teráz przystósować do Ellipsy, tak aby w nié żadné inné ilości stateczné nie wchodziły prócz osi większéy g, i mimo-środu FS, który nazwiémy m, należy nám więc c, d, w zrównaniu (Aa) będącé wyrazić przez g, m; ażе $c = \frac{k^2}{g}$, $m^2 = g^2 - k^2$; przeto $c = \frac{g^2 - m^2}{g}$, $d = g - m$, włożywszy té wártości za c, d, w zrównanié (Aa), wypadnie:

Zrównanie biegunowe na Ellipsę.

$$r = \frac{g^2 - m^2}{g - mDoſt.v} \quad - \; - \; - \; - \; (Ab)$$

Zrównanie (*Ab*) na Ellipſę zamyka dwie ilości odmienne, *r* i kąt *v*; co nás prowadzi do rozległyſzégo poznawania linii krzywych, w których nie tylko dwie linie proſté któreśmy wſpół-uſzykowanémi nazwali, bydź mogą ilościami odmiennémi i wyrážać naturę linii krzywéy; ale nawet i kąty. Takowá linii krzywych uwága wielkiégo w mechanice użyciá, odmieniá cale poſtać zrównaniá, i wyciągać po nás będzie oſobnégo roſtrząſaniá.

Wróćmy ſię ieſzcze do dáwnégo ſtanu Ellipſy, a chcąc początek odcinków s śrzodka *S* przenieść do wierzchołka *A*, potrzeba nám położyć w zrównaniu (*A*), $g - x$ za *x*; a przez tę ſztukę zamieniémy ié na $y^2 = \frac{k^2}{g^2}(2gx - x^2)$, nazwiymy linią równaniá $\frac{k^2}{g} = f$, odległość $AF = d$, będzie $d = g - \sqrt{(g^2 - gf)}$, rozwiązáwſzy to zrównanie otrzymámy $g = \frac{d^2}{2d - f}$; - -
$k = \sqrt{fg} = d\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(2d - f)}}$; gdzie $2d > f$, z natury Ellipſy; włożywſzy za *g*, *k*, dopiéro znalezioné wártóści, otrzymámy zrównanie na Ellipſę.

$$y^2 = 2fx - \frac{(2d - f)f.x^2}{d^2} \quad - \; - \; - \; (A').$$

gdzie wiérzchołek linii krzywéy ieſt początkiém odcinków.

§. XIV.

Parabola i iéy wláſności.

Przyſtąpmy iuż do wprowadzeniá nowégo warunku w zrównanie $y^2 = n + px + qx^2$, to ieſt uczyńmy $q = o$, a zrównanie $y^2 = n + px$, wyrazi nowy gatunek linii 2go porządku; którégo chcąc poznać ryſunek wyrzućmy *n*, czyli położmy za *x*, $x - \frac{n}{p}$; a

zamié-

zamieniémy ié na $y^2=px$, $y=\pm\sqrt{px}$, ponieważ x ieſt ſtopnia nieparzyſtego, wſzyſtkié iego wartości dodatné uczynią y rzetelném, to ieſt wſzyſtkié wzroſty x, które ſię tylko pomyślić mogą, byleby były dodatné, dadzą na y dwié wartości rzetelné równé; linia więc tém zrównaniém opiſana rościągnie dwie odnogi bez końca w tę ſtronę, gdzie odcinki przypadaią dodatné, i oś przedzielać ią będzie na dwie części równé. Taką linią wyſtawia nam fig. 25. gdzie oś AB pociągnie ſię z odnogami linii krzywéy w odległość nieſkończoną: biorąc zaś w zrównaniu $y=\pm\sqrt{px}$, x odiemnie; y na każdą takową wartość będzie uroionem, przeto linia krzywa od początku odcinków A, ku T nigdzie ſię nie pociągnie, a ieżeli oś większa ieſt nieſkończoną, mimo-śrzód, który ieſt funkcyą téy osi podług §. 12, będzie także nieſkończenie odległy, i oś mnieyſza przechodząca przez śrzodek także nieſkończona. Linia ta krzywa nazywa ſię PARABOLA (*Parabola*) maiąca dwie odnogi nieſkończoné na ſtronie odcinków dodatnych, śrzodek, a przeto osi obydwie bez końca. Fig. 25.

Ieżeli w zrównaniu (A') na Ellipſę, uczyniémy $2d-f=0$, to zamieni ſię na zrównanie $y^2=2fx$ wyrażaiące Parabolę: uczyniwſzy zaś $2d-f=0$, wprowadzamy kondycyą iſtotną Paraboli, to ieſt $2d=f$, czyli: *że w Paraboli przyſtawa przechodząca przez ogniſko, czyli miara równania ieſt dwa razy większa iak odległość tegoż ogniſka od wierzchołka.* Aże drugie ogniſko przypadaćby powinno z drugiéy ſtrony śrzodka, który ieſt nieſkończenie odległy, Parabola więc nie ma tylko iedno ogniſko, i w niém $FL=2AF$.

PIERWSZA WŁASNOŚĆ PARABOLI.

Ieżeli $AP=x$, $PM=y$, $y^2=2fx=2FL.AP$; $FP=x-\frac{1}{2}f$; więc $FM^2=y^2+x^2-fx+\frac{1}{4}f^2$; $FM=x+\frac{1}{2}f=AP+AF$.

DRUGA WŁASNOŚĆ PARABOLI.

Ta właſność Paraboli podaie nam barzo łatwy ſpoſób znalezienia iéy punktów geometrycznie: ieżeli bowiem

bowiem $FM = AP + AF$, na osi AB poprowadziwszy równo-ległe MPM', i na każdy odcinek rysuiąc łuk koła którego promień $= AP + AF$, gdzie te łuki przetną linie równo-ległe MPM' tam będą punkta Paraboli.

Poprowadziwszy do punktu M, styczną MT, punkt T oznaczemy z własności ogólney na linie 2go porządku, iest bowiem $BT = \frac{g^2}{x}$ rachuiąc odcinki s środka; biorąc ie zaś u wierzchołka A, trzeba za x położyć $g - x$; więc $BT = \frac{g^2}{g-x}$, $AT = \frac{g^2}{g-x} - g = \frac{gx}{g-x}$; aże $g = \frac{1}{0}$, $g - x = g$, więc $AT = x = AP$.

Trzecia własność Paraboli.

Ponieważ $FT = AT + AF = AP + AF = FM$, tróykąt FTM iest równo-ramienny, i kąt $TMF =$ kątowi MTF przeto $MFP = 2MTF$; $Sty.MTP = \frac{y}{2x}$; $Sty.2.MTP = Sty.MFP = \frac{y}{2x-f} = \frac{\sqrt{2fx}}{2x-f}$; i znowu FT będąc $= FM$, prosto-padła FS z ogniska na styczną rozdzieli TM na dwie części równe: powtóre AT będąc równe AP; pionowa AS rozdzieli także TM na dwie części równe, więc punkt S iest spólny dwóm pionowym AS, FS. S tych własności wypada; $TM = \sqrt{(4x^2 + 2fx)} = 2\sqrt{[x(x + \frac{1}{2}f)]} = 2\sqrt{(AP.FM)}$, $TS = \sqrt{(AP.FM)} = \sqrt{(AT.FT.)}$ z własności zaś tróykątów mamy:

$AS:TS = AF:FS$ - - - $AF:AS = AS:AP$.

$FS = \frac{AF.TS}{AS} = \frac{AF.TS}{\sqrt{(AF.AP)}} = \sqrt{(AF.FM)}$. Czwarta własność Paraboli.

Spuściwszy na styczną prosto-padłą MW, mamy $PT:PM::PM:PW$ - - $PW = \frac{y^2}{2x} = \frac{2fx}{2x} = f$, więc $PW = FL = 2AF$, a przeto $FW = AP - AF + AF = AP + AF =$

$AF=$

$AF=FM=FT$; Piąta własność Paraboli.

Prowadźmy od M równo-ległą osi MN, i przeciągniymy styczną do X, ponieważ własność V. uczy nas że kąt $FMW=$ kątowi FWM; $PMN=TNW=90°$. odciągnąwszy od każdego WMN, wypáda kąt $NMX=$ kątowi FMT. wszystkie więc linie równo-ległe osi pádaiąc na Parabolę i odbiiaiąc się pod kątem równym do styczney, zniydą się w ognisko.

Przystósuymy teraz zrównanie Biegunowe (Aa) do Paraboli, którego iuż niemożemy przez funkcyą osi i mimo-śrzodu wyrazić, dlá tego że obydwie te linie są nieskończone w Paraboli, możemy ie atoli wyrazić albo przez linią równaniá, albo przez odległość ogniska od wierzchołka. Że zaś w paraboli $d=\frac{c}{2}$ zrównanie biegunowe będzie:

$$r=\frac{2d^2}{d+dDost.v}, \text{ albo } r=\frac{c^2}{c+cDost.v} \quad - - (Ac).$$

§. XV.

Zostaie nám iesźcze ieden warunek do wprowadzeniá w zrównanie $y^2=n+px+qx^2$, to iest żeby q było ilością koniecznie dodatną, skąd nám wypaśdź powinien trzeci gatunek linii 2go porządku. Dlá poznaniá rysunku tey nowey linii krzywey, wyrzućmy drugi termin s tego zrównaniá, czyli odnieśmy odcinki do śrzodka, wziąwszy $x=x-\frac{p}{2q}$, a zaś $n-\frac{p^2}{4q}=-a$, zrównanie podane stanie się: Hyperbola i iey własności.

$$y^2=qx^2-a.$$

pierwszá uwágá nad tem zrównaniem przekonywá nás, że a będąc odiemnem, uczyniwszy $x=o$, y stanie się uroionem, to iest że liniá krzywá, nie przeydzie tam, gdzie przypádá iey śrzodek: biorąc potem za x wártości mnieysze od $\sqrt{\frac{a}{q}}$, iesźcze y nie prze-

stanie

ſtanie bydź uroioném: kiedy $x=\pm\sqrt{\frac{a}{q}}$, $y=o$, to ieſt że dopiéro w odległości $\sqrt{\frac{a}{q}}$ od śrzodka, liniá krzywá przeciąwſzy oś, zacznie ſię z dwóch ſtron, to ieſt w ſtronie odcinków dodatnych i odiemnych; będzie ſię więc znaydować rozerwana w dwóch miéyſcach,
Fig. 26. tak dalece: że obrawſzy na fig. 26 *C* za śrzodek, uczyniwſzy $CA=CB=\sqrt{\frac{a}{q}}$, liniá krzywá zacznie ſię przy *A*, i *B*, w żadném zaś miéyſcu przy linii *AB*, nie będzie przechodzić: przeſzedłſzy za *A* i *B* wſzyſtkie wártości na *x* będą większé od $\sqrt{\frac{a}{q}}$, aże takie wártości bądź dodatné bądź odiemné, uczynią piérwiáſtki źrównaniá zawſze rzetelnémi, i nie odmienią nic w ich wyrazie dla potęgi *x* párzyſtéy, przeto liniá krzywá począwſzy ad *A* i odwróciwſzy ſię od śrzodka rościągnie dwie odnogi bez końca: toż ſamo przytrafi ſię u *B*; na każdą bowiem wártość dodatną *x*, będą odpowiadać dwie wartości *y* równé, i na káżdą wártość odiemną, dwie takież: liniá więc krzywá będzie miała cztéry odnogi nieſkończone, to ieſt dwie na odcinki dodatné odpowiadaiącé przyſtawom dodatnym i odiemnym; i dwie na odcinki odiemné, naznaczoné także dwoiakiémi przyſtawami. Iedna pára takowych odnóg będzie oddzieloná od drugiey linią *AB*; ieżeli tę linią weźmiémy za oś, a razem za śrzednicę iako przechodzącą przez śrzodek, będzie $CA=\sqrt{\frac{a}{q}}=g$; $a=qg^2$, i zrównanié na linią którą nazwano *Hyperbola* będzie:

$$y^2=q(x^2-g^2).$$

Zátrzymáymy ſię teráz nád piérwiáſtkowém przypuſzczeniém, zbliżywſzy té rozumowaniá, któré nám ſłużyły do poznaniá ryſunku w Ellipſie. Wzięliśmy

w piérwſzém

w pierwszém zrównaniu a za odiemné, i uczyniwszy $x=o$, wypadło y uroioné, ale że w Ellipsie i w każdéy linii 2go porządku biorąc środek za początek odcinków, na $x=o$, otrzymaliśmy zawsze wartość drugiéy średnicy czyli osi mniéyszéy, takową oś iak widzémy iest uroioną w Hyperboli, czyli przez te miéysca gdzie oś poprzeczna przypada, Hyperbola nie przechodzi; gdybyśmy byli wzięli a za dodatné; na $x=o$, otrzymalibyśmy byli y rzetelné, ale na $y=a$, byłoby wypadło x uroioné, to iest Hyperbola znaydowałaby się była na linii RS, a oś AB byłaby była została uroioną. S téy uwagi wypada: *naprzód* że w Hyperboli iedna oś iest koniecznie uroioną: *powtóre*, że którąkolwiek s tych osi weźmiémy za uroioną, linia krzywa odmiéni swoié położenié, ale nic nie odmiéni w swoiéy naturze i własnościach: *potrzecié* że to położenié Hyperboli zawisło od a, biorąc ié za dodatné lub odiemné.

Wprowadziwszy tę własność służącą saméy Hyperboli, to iest: że oś mniéysza k, iest uroioną $k\sqrt{-1}$, w zrównanie na Ellipsę; kładąc $-k^2$ za k^2, zamiéniémy ié na zrównanié wyrażaiącé Hyperbolę:

$$y^2=\frac{k^2}{g^2}(x^2-g^2) \quad . \quad . \quad (B)$$

co właśnie zgadza się s tém pierwiastków uroionych tłómaczeniém, któreśmy w Algebrze pod §. 15 wyłożyli: oś bowiem uroiona, pokazuie nam tylko, że żaden iéy punkt nie należy do linii krzywéy, ale będąc linią oderwaną od odnogi, wyrażać może barzo dobrze stósunki i własności linii na tych odnogach zostaiących, a przeto może zastępować w zrównaniu miéysce ilości statecznych. Iakoż przez tén wprowadzony warunek, możémy wszystkié własności Ellipsy przerobić na własności Hyperboliczné, byleby té były funkcyami osi. Odległość n.p. ognisk w Hyperboli $=\pm\sqrt{(g^2+k^2)}$, będąc wyrazém rzetelnym, dowodzi że w Hyperboli są dwa ogniska F, G, tak iak w Ellipsię: to iest prowadziwszy przez środek

dek linią pod kątem, którégo doſtawa równá ieſt pół-osi g, i na tę z ogniſka ſpuściwſzy pionową, przeciw-proſto-kątna tego tróykąta wyrazi nám geometrycznie odległość ogniſka od środka $CF=\sqrt{(g^2+k^2)}$; poniéważ $CP=x$, $PM=y$, $FP=x-\sqrt{(g^2+k^2)}$, $GP=x+\sqrt{(g^2+k^2)}$; $FM^2=FP^2+PM^2=\frac{(g^2+k^2)x^2}{g^2}$ $\frac{-2g^2x\sqrt{(g^2+k^2)}+g^4}{g^2}$, czyli $FM=\frac{x\sqrt{(g^2+k^2)}}{g}-g$; podobnie znáydziémy $GM=\frac{x\sqrt{(g^2+k^2)}}{g}+g$, a przeto - - $GM-FM=2g$, to ieſt: *iak w Ellipſie ſumma, tak w Hyperboli rożnica linii z ogniſk do iakiégokolwiek punktu M prowadzonych, ieſt wyrazém ſtatecznym i równym osi więkſzéy AB.* PIERWSZA WŁASNOŚĆ HYPERBOLI.

Chcąc prowadzić ſtyczną MT, a przeto oznaczyć punkt T, mámy naprzód z §. 12. $CT=\frac{g^2}{x}$, $PT=CP-CT=\frac{x^2-g^2}{x}=\frac{y^2g^2}{k^2x}$; $FT=\frac{x\sqrt{(g^2+k^2)}-g^2}{x}$; $GT=\frac{x\sqrt{(g^2+k^2)}+g^2}{x}$; przypatrzywſzy ſię wártościom wyżéy znalezionym na FM, GM; i porównawſzy ié z FT, GT; wypadnie:

$FT:FM=g:x$ - - $GT:GM=g:x$ - - $FT:FM=GT:GM$: to ieſt: $Wſt.FMT:Wſt.FTM=Wſt.GMT:Wſt\ FTM$, więc $Wſt.FMT=Wſt.GMT$. czyli: *ſtyczná do iakiegokolwiek punktu M, dzieli kąt zawarty między dwiema liniami z ogniſk do tegoż punktu prowadzonémi, na dwa kąty równe.* DRUGA WŁASNOŚĆ HYPERBOLI.

Wártość znalezioná na PT; i wyciągnioná z (B) na PM, dá nám poznać MT iako przeciw-proſto-kątną tróy-kąta TPM: otrzymamy bowiem

$$MT=\frac{y\sqrt{(k^4x^2+y^2g^4)}}{k^2x}=\frac{y\sqrt{[(k^2+g^2)x^2-g^4]}}{kx}=\frac{yg}{kx}$$

$\sqrt{(FM.}$

$\sqrt{(FM.GM)}$. Pospuszczáwszy na styczną MT przeciągnioną z śrzodka i obudwóch ognisk pionowé CQ, FH, GK, podobieństwo tróy-kątów daie nám:

$$TM:TP::CT:TQ \text{ - - } TQ=\frac{TP.CT}{TM}=\frac{g^3y}{kx\sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:MP::CT:CQ \text{ - - } CQ=\frac{CT.y}{TM}=\frac{gk}{\sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:PT::FT:TH \text{ - - } TH=\frac{FT.PT}{TM}=\frac{g^2y.FM}{kx\sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:PM::FT:FH \text{ - - } FH=\frac{FT.PM}{TM}=\frac{k.FM}{\sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:PT::GT:TK \text{ - - } TK=\frac{GT.PT}{TM}=\frac{g^2y.GM}{kx\sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:PM::GT:GK \text{ - - } GK=\frac{GT.PM}{TM}=\frac{k.GM}{\sqrt{(FM.GM)}};$$

skąd wypádá $FH.GK=k^2$ tak iak w Ellipsie pod właśn. 5. powtóre $TH.TK=\frac{g^4y^2}{k^2x^2}=CT.TP$, to iest: $TH:CT::TK:TP$. Pociągnąwszy linią CH, i podobną sobie wyobraziwszy CK, znáydziem że $QH=QK=\frac{TH+TK}{2}=\frac{gy\sqrt{(g^2+k^2)}}{k\sqrt{(FM.GM)}}$, stąd zaś $CH^2=CQ^2+QH^2=g^2$, $CH=g$, znowu iak w Ellipsie pod właśn. III. to iest: $CH+CK=GM-FM=AB$, znáydziemy ieszcze $CQ+HF=\frac{kx\sqrt{(g^2+k^2)}}{g\sqrt{(FM.GM)}}$; a przeto $(CQ+FH)^2-CQ^2=k^2$, to iest: $CX=\pm\sqrt{(k^2+CQ^2)}$ na oznaczenie ognisk w Hiperboli.

Widzémy więc oczywiście, iż uważané dotąd własności Hiperboli są iéy z Ellipsą spólné, tak dalece, że Hyperbola uważać się może iako Ellipsa rozerwaná i odwrócona od osi mnieyszéy. Nim przystąpiémy do właściwszych charakterów téy linii krzywéy, przeróbmy do niéy zrównanié biegunowé §. 12. Mámy zaś

my zaś w Hyperboli odległość wierzchołka od ogniſka $d=m-g$; linią porównaniá $c=\frac{k^2}{g}=\frac{m^2-g^2}{g}$, a włożywſzy té wártości w zrównanie (Aa) §. 12. wypadnie na Hiperbolę.

$$r=\frac{m^2-g^2}{g+mDoſt.v} \quad - \quad - \quad - \quad (Ad).$$

§. XVI.

Hiperbola między ledwo nie ſtycznémi, i iéy właſności

Kiedy linie proſté z ogniſk Hiperboli wychodzące przywiodły nás do właſności takich, iakieśmy doſtrzegli w Ellipſie; zaſtanówmy ſię nad właſnościami iéy ſtycznych, które nás może nauczą znakomitſzych charakterów Hyperboli. Odległość od tégo punktu, gdzie ſtyczná przeciná oś wypadła nám z §. 12. $CT=\frac{g^2}{x}$, CT będąc cáłkiém zawiſłé w ſwych odmianach od x, nie może ſię inaczéy zmniéyſzać, tylko kiedy ſię x powiękſzá, to ieſt punkt T na fig. 26. nie może ſię zbliżać do śrzodka, tylko kiedy ſię odcinek CP od niégo oddálá, poluwaiąc P, a z niém punkt M przez wſzyſtkié odmiany wzráſtaiącé x, iakóżkolwiek zmniéyſzać ſię będzie CT, nigdy punkt T nie padnie na C, i nigdy TM nie przeſtanie bydź ſtyczną, poki liniá krzywá zoſtáwáć będzie przy ſwoich iſtotnych właſnościach, to ieſt póki zrównanié na Hyperbolę nic nie odmieni w ſwoim związku iſtotnégo. Tu pamiętni na początki §. 16. Algebry, widzémy oczywiście, ze CT ubywaiąc zbliżá ſię do ſwoiéy granicy o, a z niém $CP=x$ wzraſtaiąc do granicy ∞, ale obydwié té ilości nigdy ſwych granic nie doſięgną, póki natura linii krzywéy zoſtanie ta ſama. Wyſtawić ſobie CT, i CP u ſwoich granic, ieſt to iedno co wyſtawić ſobie że liniá krzywá, i iéy ſtyczná TM odmieniły ſwóy iſtotny charakter, i przeſtały bydź tém, czém ſą teráz; ale razém ieſt to ſobie wyſtawić że liniá krzywá i iéy ſtyczná maią za granice ſwych odmián inné linie, do ktorych ſię

Fig. 26.

coráz

coráz barziéy zbliżaią, i w które się zamieniaią, kiedy punkt T padnie w środek, chcąc takowé granice poznać, wprowádźmy warunek, na to potrzebny, to iest: że $x=\frac{1}{0}$, czyli że x doszło do tego stanu, w którym żádná ilość skończoná nié może go ani zmniéyszyć ani powiększyć, CT będzie $=o$, a liniá TM ciągnąć się nad odnogą Hyperboli, i zbliżaiąc się coráz barziéy do niéy, nigdy się linii krzywéy nie dotknie, chyba w oległości nieskończonéy, to iest kiedy Hyperbola przestanie bydź Hyperbolą, i zamiéni się na linią innéy natury do któréy się iako do swéy granicy zbliżała. Takową linią ciągnącą się bez końca nad odnogą Hyperboli maluie nám CX na fig. 27. którą nazywać będziémy Ledwo-niestyczną linii krzywéy (*Asymptota curvae*). Naturę takowéy ledwo-niestycznéy CX wyciągniémy z zrównaniá (B) na Hyperbolę, uczyniwszy w niém $x=\frac{1}{0}$, a przeto zmazáwszy wszystkié ilości stateczné dodané lub odciągnioné, które przed x nikną. Tym sposobém zrównanié (B) zamieni się na $\frac{y}{x}=\frac{\pm k}{g}$, które wyrážá dwie linié prosté CX, CZ, to iest na y dodatné i odiemné odpowiadaiącé odcinkóm dodatnym; i znowu CW, CU odpowiadaiącé x odiemnym, ciągnącé się po nad drugiémi dwiema odnogami Hyperboli. Aże wprowadziwszy $x=\frac{1}{0}$ w zrównanié (B), odnieśliśmy Hyperbolę do tego miéysca, w którém się liniá CX zetknie z Hyperbolą, to iest gdzie punkta Hyperboli zmieszaią się s punktami linii prostéy CX, i liniá krzywá zamiéni się na ledwo-niestyczną wyrażoną zrownaniém $\frac{y}{x}=\pm\frac{k}{g}$. Przypádek tén szczególny, na który nás włásności Hyperboli naprowadziły, ogarniaiąc ogólniéyszym sposobém, widzémy, *naprzód*: że linie krzywé maiąc odnogi nieskończoné zbliżaią się swym wzrostém do innégo rodzaiu linii iako do swych granic; *powtóré* że takowé granice

Fig. 27.

E 3 linii

linii krzywych wypádaią z ich zrównáń, uczyniwszy wspól-uszykowane nieskończonémi; przez co zmnieyszywszy liczbę terminów w zrównaniu podaném, zamieniámy związek służący linii krzywéy, na związek wyrážaiący naturę ledwo-niestyczn'ey. Linie więc krzywé naturą między sobą różné, różnić się ieszcze mogą przez granice, do których się zbliżaią, a przeto nowé ich właśności wypaśdź mogą s porównaniá ich co do granic. Nim nową tę teoryą ogólniéy rostrząsać nám przyidzié, zatrymáymy się nad właśnościami Hyperboli położonéy między ledwo-niestycznémi, a uwági teraźnieyſze służyć nám będą za wzór do przyszłych dociekáń.

Kiedy zrównanié (B), zamieni się na $\frac{y}{x}=\frac{k}{g}$,

Fig. 27. punkt *M* fig. 27. zniydzie się s punktém *X*, i $\frac{y}{x}$ wyráżać będzie styczną kąta *PCX*: u wierzchołka więc *A* postawiwszy pionową *AD*, będzie styczná $ACD=\frac{AD}{CA}=\frac{k}{g}=\frac{y}{x}$, a przeto $k=AD$, $CD=\surd(g^2+k^2)=CF$; styczna $2ACD=Sty.DCE=\frac{2kg}{g^2-k^2}$, (§. 54. Alg.), gdyby więc było $AD=AC$, $Sty.ACD=1=Sty.45°$; $Sty.DCE=\frac{1}{0}$, to iest, kąt między ledwo-niestycznémi zawarty byłby kątém prostym, i takowá Hyperbola nazywá się Równo-boczną (*Hyperbola Aequilatera*), na którą zrównanié $y^2=x^2-g^2$; $CD=CF=k\surd 2$. Wróćmy się do pierwszégo gatunku Hyperboli między ledwo-niestycznémi, gdzie $g>k$, ponieważ $PX=\frac{kx}{g}$, $CP=x$, $CX=\frac{x\surd(g^2+k^2)}{g}=FM+AC=GM-AC$; będzie $MX=PX-PM=ZN=\frac{kx-gy}{g}$; $NX=PX+PM=\frac{kx+gy}{g}=MZ$; $XM.XN=\frac{k^2x^2-g^2y^2}{g^2}$, włożywszy za

za g^2y^2 wártość wyciągnioną z zrównaniá (B), otrzymámy $XM.XN=ZN.ZM=k^2=AD^2$. Pierwsza własność Hyperboli między ledwo-niestycznemi.

Poprowadziwszy s punktu M, ML równo-ległą ledwo-niestyczney CZ; kąt $LXM=$ kątowi LMX, przeto $LM=LX$, i tróykąt $LXM \backsim$ tróykątowi DCE; skąd

$$DE:CE=XM:LM \text{ - - } LM=\frac{CE.XM}{DE}=\frac{(kx-gy)\sqrt{(g^2+k^2)}}{2kg},$$

$$CL=CX-LM=\frac{(kx+gy)\sqrt{(g^2+k^2)}}{2gk};\quad CL.LM=$$

$$\frac{(k^2x^2-g^2y^2)(g^2+k^2)}{4k^2g^2}=\frac{k^2+g^2}{4}.$$ to iest: że wziąwszy iednę ledwo-niestyczną zá linią odcinków, i na tey prowadząc przystawy do iakiegokolwiek punktu Hyperboli równoległe drugiey ledwo-niestyczney, mnogość dwóch takowych współ-uszykowanych iest funkcyą nieodmienną. Z wierzchołka więc A, pociągnąwszy AH ró-wnoległą CD, z właśności tróykątów wypádá $CH=AH$; aże $CL.LM=CH.AH=AH^2$, linia AH będzie niby linią porównaniá, którey potęga drugá równá się współ-uszykowanym wspomnionym na iakikolwiek punkt Hyperboli. Druga własność Hyperboli między ledwo-niestycznemi.

Ponieważ $CH=HE=\frac{1}{2}\sqrt{(g^2+k^2)}=AH$, nazwawszy tę linią iako stateczną a, przytym $CP'=x$, $P'M'=y$; z właśności drugiey wypádá nam zrównanie na Hyperbolę między ledwo-niestycznémi $yx=a^2$ -- - (C). gdzie przystawa będąc równo-ległą CX, nie przeciná tylko w iedném mieyscu linią krzywą. Chcąc iesczce dostąpić ogólnieyszégo zrównaniá na Hyperbolę między ledwo-niestycznémi, czyli chcąc przystáw nie przywięzywać do żadnégo warunku, biorę linią iakąkolwiek IK, i tey przez M' poprowadziwszy równo-ległą $Q'M'$ przecinaiącą linią krzywą w dwóch punktach, nazywám $CQ'=t$, $Q'M'=u$, a podobieństwo tróykątów $P'M'Q'$, CIK daie mi następuiące proporcye:

$$KI:CI::Q'M':P'Q' \;-\;-\;-\; P'Q'=\frac{u.CI}{KI};$$

$$KI:CK::Q'M':P'M' \;-\;-\;-\; P'M'=\frac{u.CK}{KI}=y.$$

Aże $CQ'=t=CP'+P'Q'$ - - mámy $x=t-\frac{u.CI}{KI}$, włożywszy te wártości za x, y, w zrównanie (C), otrzymámy:

$$u^2-\frac{KI.t}{CI}u+\frac{a^2.KI^2}{CK.CI}=0 \;-\;-\; (D).$$

pierwiástki tego zrównaniá są dwa przecięciá Hyperboli w punktach M', M; aże liniá KI iest nieodmienną równie iak CK, KI, bo nie leży na żádnym punkcie linii krzywey, idzie zatem, że mnogość dwóch przystáw náleżących do iednego odcinku záwartá w ostatnim terminie zrównaniá, iest funkcyą stateczną, czyli $Q'M'.Q'M=\frac{a^2.KI^2}{CK.CI}$, TRZECIA WŁASNOŚĆ HYPERBOLI MIĘDZY LEDWO-NIESTYCZNEMI.

Drugi termin zrównaniá (D) będąc równy summie pierwiástków daie nám $Q'M'+Q'M=\frac{KI.t}{CI}=Q'O$, s kąd $OM=Q'M'$, gdy więc cięciwa $M'M$ stanie się styczną linii krzywey, n.p. VS punkt dotykaniá się Y, przypadnie w samym środku linii VS: aże podług włásności III. mnogość dwóch przystáw do tegóż samego odcinku náleżących iest nieodmienną; równaiąc takowe mnogości s styczną do linii krzywey równo-ległą wszystkim innym przystáwom, wypadnie nám zrównanie $Q'M'.Q'M=b^2$, gdzie b, znaczy przystawę dotykaiącą się linii krzywey, co nám pokazuie CZWARTĄ WŁASNOŚĆ HYPERBOLI MIĘDZY LEDWO-NIESTYCZNEMI.

Te ostatnie włásności uczą nás sposobu prowadzeniá stycznych do Hyperboli między ledwo-niestycznemi.

mi. Punkt bowiem dotykaniá ſię leży zawſze w śrzodku linii do ledwo-nieſtycznych prowadzonéy, s takiégo punktu Y pociągnąwſzy YT równo-ległą ledwo-nieſtyczné'y CW, podobieńſtwo tróykątów nás przekonywa, że ieżeli $VY = \frac{1}{2}VS$, muſi także bydź $YT = \frac{1}{2}CV$, i $CT = \frac{1}{2}CS$, s kąd łatwy ſpoſób znaleziеniá punktu V, albo S, a przeto oznaczeniá ſtycznéy. A ieżeli podług właſn. II. $CT.TY = \frac{g^2+k^2}{4}$, kładąc za CT, $\frac{1}{2}CS$; za TY, $\frac{1}{2}CV$; wypádá $CS.CV = g^2+k^2 = CD^2$, to ieſt:

$$CS:CD::CE:CV,$$

równaiąc té boki z wſtawami kątów im przeciwległych, znáydziém, że kąt $CSD =$ kątowi CEV, i kąt $CDS =$ kątowi CVE, a przeto linie SD, VE ſą ſobie równo-ległé. Piąta własność Hyperboli między ledwo-niestycznemi.

Kròtki zbiór nauki całégo rozdziáłu odkrywá nám po zoſtałé ieſzcze o liniach krzywych dociekaniá.

Stawiwſzy ſobie przed umyſł cały zbiór uwág teraźnieyſzégo rozdziáłu, i upowſzechniwſzy niektóré doſtrzeżoné właſności, poznámy łatwo, co nám ieſzcze do uważaniá w liniąch krzywych pozoſtaie. Uwági ogólné nad zrównaniami 2go ſtopnia poſłużyły nám ſzczęśliwie do poznaniá wſzyſtkich właſności linii 2go porządku. Té właſności należą do trzech rodzaiów linii proſtych maiących ſwé punkta położone na linii krzywéy, to ieſt: do *cięciw*, *śrzednic*, i *ſtycznych*, s których dwie piérwſze przecinaiąc linie krzywé umieścić ſię mogą w iednéy kłaſsie, przywodząc wſzyſtkié właſności do przecięć i ſtycznych. Chcąc ſię trzymać téy saméy drogi w dociekaniu przymiotów linii wyżſzych porządków, potrzebaby nám bydź w ſtanie rozwiązaniá tak dokładnie zrównáń wyżſzych ſtopni, iak ſtopnia 2go, od czego ieſteśmy ieſzcze dalekiemi przez niedoſkonałość Algebry. Nie zoſtaie nám więc inná droga do przeniknieniá w rozległéyſzé właſności linii iakichkolwiek porządków, iak tylko upowſzechnić tak daleko naſzé myśli i

uwági nad liniami krzywémi, aby ie uczynić niezawiſłémi od rozwiązaniá zrównań. Potrzeba nám więc teoryą śrzednic i ſtycznych do takiéy wynieść ogólności, aby ta niepotrzebowała innych pomocy Algebry, prócz ogólnych właſności zrównań w Rozdziale III. Piérwſzéy Częśći Algebry wyłożonych. A ponieważ otrzymaliśmy dwoiakiégo rodzaiu ſtyczné; iedné należącé do punktów linii krzywéy w odległości ſkończonéy, drugié do punktów w odległości nieſkończonéy; té zaś oſtatnié ſłużąc tylko ſamym liniom krzywym odnogi bez końca maiącym, mogą nás nauczyć o iſtotnym charakterze i podziále linii krzywych na té, które ſię w pewnéy rozległości zamykaią, i té które ſię rościągaią bez końca, wypádá nam náprzód ſtóſować linie krzywé do ledwo-nieſtycznych, i wyciągnąć ogólné ſpoſoby poznaniá ich odnóg: po czém przyſtąpiemy do poznaniá rozległéyſzégo teoryi ſtycznych w odległości ſkończonéy, i wſzyſtkich właſności od niéy zawiſłych. Nakoniec zatrudniémy ſię roſtrząſaniém przecięć w liniach iakichkolwiek porządków.

ROZDZIAŁ TRZECI.

Granice ilości CIĄGLE WZRASTAIĄCYCH odmiéniaiąc związki zrównań, prowadzą nás do poznaniá ODNÓG NIESKONCZONYCH w liniach krzywych, skąd wypádá podział linii w każdym porządku na rodzaie i gatunki: granice zaś ilości CIĄGLE UBYWAIĄCYCH odkrywaią znakomitſzé cechy ODNÓG SKONCZONYCH, i ſpoſób równaniá wſzyſtkich linii krzywych s kołém.

§. XVII.

Idąc za ciągiém uwág wyłożonych w poprzédzaiących rózdziáłach; nie możémy nie przyznać, że rozeznanie

zeznanie linii krzywych maiących odnogi nieſkończone, od tych które ſię w odległości ſkończoney zamykaią, ieſt náygłównieyſzém znamieniém do poznania ich ryſunku. To zaś rozeznanie chcąc ſobie doſtępne uczynić we wſzyſtkich porządkach, to ieſt chcąc ie mieć niezawiſłe od rozwiązania zrównań; potrzeba nám ſię zagłębić w teoryą granic, do których ſię odnogi nieſkończone linii krzywych zbliżaią. Granice te, którėśmy ledwo-nieſtycznémi nazwali, muſzą mieć także ſwoie podziały i gatunki podług różnych wymiarów ilości odmiennych w zrównaniu. Wyſtáwmy ſobie różne potęgi ilości odmienney x, lub kilku na ráz; odſunąwſzy myślą takowe ilości odmienne do oſtatnich granic ich wzroſtu lub ubywania, i poznawſzy ſtán x w takowey granicy względém ilości ſtatecznych i ſkończonych, poznać nám go ieſzcze potrzeba względem innych ilości odmiennych, i względem różnych wymiárów teyże ſamey ilości. Wielcy Geometrowie naſzego wieku począwſzy od Newtona, podzieliwſzy ſię naprzód na zdania, zgodzili ſię potém na różne ſtopnie ilości nieſkończenie wielkich, które im otworzyły niezmiernie rozległą drogę wynalázków w Matematyce wyżſzey. Zapatrzywſzy ſię na tyle nieprzepartych práwd przez nich odkrytych, nie można było z wypádków wątpić o pewności wprowadzonych początków. Ale tłómaczenie takowych początków tak zoſtało ciemne i niezrozumiane w ich dziełach; iż zázdroſzcząc ich przenikłości, trzeba było ubolewać nad loſem práwdy, że wydobytá z głębi trudności, małey liczbie rozumów ſtawała ſię doſtępną; a co náyżałośnieyſzá, że Geometryá będąc zawſze ſtolicą oczywiſtości, pokrywać ſię zaczęła zaſłoną, za którą ciężko ſię było przedrzeć rozumowi. Któż bowiem mógł kiedy zrozumieć ilości nieſkończenie wielkie i nieſkończenie małe podzielone na różne ſtopnie, nieſkończenie większe względém drugich nieſkończonych i t.d? A przecież tén był ięzyk wprowadzony w dzieła wielkich

Ledwo-nieſtyczne linii krzywych prowadzą nás do teoryi granic. Wytyka ſię nie dokładne tey teoryi tłómaczenie.

ludzi, a znaczenie takowych słów zostało w ciemności swoiéy aż do czasów dwóch Geometrów Paryzkiéy Akademii d' Alembert i Cousin, s których pierwszy trafiwszy szczęśliwie na drogę prawdziwego znaczeniá; zostawił drugiému chwałę wyłożeniá w całéy mocy i świetle naytrudniéyszych początków Matematyki wyższéy. Obydwa atoli zostawili iesscze wielé do czynieniá w iasném wyłożéniu różnych stopni ilości nieskończenie wielkich. Spodziéwam się że to, co mi długá uwága podała, będzie miłą dla czytelnika rzeczą, bo go przyprowadzi naprzód do wystawiéniá sobie w ogólnym obrazie práwd matematyki wyższéy; powtóré: że teoryą odnóg nieskończonych w liniach krzywych znaydzie daleko iaśniéy i mocniéy wyłożoną, niż dotąd była.

Znaczenie i początki teoryi granic.

Przeprowadziwszy myślą ilość iakąkolwiek odmienną x, przez wszystkié wzrosty lub ubywaniá aż do swoiéy granicy (§. 16. Algebry); wiémy tylko z właśnych naszych przypuszczéń i natury samych granic, że ią potém żádná ilość skończoná nie może powiększyć ani zmniéyszyć: ale o naturze i innych właśnościach takowéy do granic odniesionéy ilości nic sobie iasnégo i oznaczonégo nie możémy wystawić, ieżeli tę ilość zważámy samotną i oderwaną od wszelkiégo związku; bo poznáwaniá ilości nie mogą bydź tylko względné, to iest przez porównanié iéy odmián z innémi ilościami: maiąc zaś związek ilości odmiennéy z innémi ilościami wyrażony przez zrównanié, i w niém odniósszy tę odmiénną ilość do granicy swégo wzrostu lub ubywaniá, wszystkié ilości stateczné i skończoné któré są do niéy dodané lub odciągnioné nie mogąc iéy więcéy zmniéyszyć ani powiększyć, zniknąć przed nią muszą, i bydź powinny wymazané z zrównaniá: to zrównanié straciwszy niektóré terminy odmiéni związek, a z nim całą wártość i naturę ilości odmiennéy. Nowá ta wártość cále różná od przeszłéy, uczy nás dopiéró o właśnościach granicy, do któréy się ilość w swych

ſwych odmianach zbliżała. Niech będzie zrównanié $Ax+By+C=o$, w którém x, y, ſą odmiénnémi; A, B, C, zaś funkcyami ilości ſtatecznych; odnióſſzy x, y, do ſwych granic, czyli iak mowić zwykliśmy uczyniwſzy ié nieſkończonémi, C w porównaniu ich zniknie, i zrównanie ſię zamiéni na $Ax+By=o$, daiącé nám związek dwóch odmiénnych x, y, cale inſzy od przeſzłégo, to ieſt związek tén, do którégo ſię piérwſzé zrównanié przy uſtawicznym wzroście ilości zbliżało. To co mowiémy o ilościach wzráſtaiących, ſłuży równie ilościom ubywaiącym czyli zbliżaiącym ſię do drugiéy granicy zero; s tą różnicą, że iako w piérwſzym przypádku terminy złożoné s funkcyi ſtatecznych nikną przed odmiennémi, tak w oſtatnim, terminy ilości odmiénnych niſzczeią przed ſtatecznémi. S tych uwág wypádaią naſtępuiącé prawdy: *Naprzód:* że odnoſzenié ilości odmiénnych do ſwych granic nic nás nie uczy w funkcyi, zoſtawuiąc w nás wyobrażenié ciemné i obłąkané o naturze takowych odmián; a przeto że takowy ſpoſób poznáwaniá ieſt właściwy ſamym związkom i zrównaniom. *Powtóré:* że ſpoſób takowy uważaniá, nic innégo nie ieſt, tylko ſztuką rozumu barzo ſzczęśliwą do przerábianiá iednych związków ilości na drugié, ſztuką wyciągnioną z głębokich uwág nad właſnościami ilości odmiennych.

Pamiętni o początku wyłożonym w §. 27. Algebry, że natura ilości zależy na iednoſtayności wymiaru, wnieść powinniśmy, że w zrównaniu zamykaiącém ilości odmienné różnégo wymiaru, każdy ſtopiéń miéć powinién inną granicę, do któréy ſię w ſwych odmianach zbliżá: iakże té granice rozróżnić i znaleśdź w zrównaniu iakiégokolwiek ſtopnia - - $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+$ i t. d. - - $+H=o$?. Na rozwiązanié téy trudności przypomniymy ſobie początki §. 19. Algebry, rozdzieliwſzy pytanié teraźnieyſzé na dwa przypádki: to ieſt kiedy w zrównaniu podaném wſpół-czynniki A, B, C, i t. d. ſą funkcyami ſamych

mych ilości ſtatecznych; powtóre: kiedy też wſpółczynniki zamykaią drugą ilość odmienną y. Co do pierwſzego: zrównanie podane ſtopnia m, zamyka m pierwiáſtków, s których każdy daie wártość x przez funkcyą ilości ſtatecznych. Tyle więc s tego zrównania wypadnie zrównań pierwſzego ſtopnia, ile m ma iedności. Wyſtáwmy ſobie takowe zrównania wyrażaiące pierwiáſtki x, $\alpha x+a=o$, $\beta x+b=o$, - - $\gamma x+c=o$. i t. d. Gdybyśmy teráz w każdém s takowych zrównań, x odnieśli do ſwéy granicy; ilości ſtateczne a, b, c, i t. d. caleby znikły, nie zoſtawiwſzy tylko ſamę odmienną x: te ilości odmienne mnożąc przez ſię, wypadłby nám tylko ſám náywyżſzy termin zrównania podanego $Ax^m=o$; wſzyſtkie zaś terminy inne caleby odpadły, bo te terminy powſtały w zrównaniu przez mnożenie ilości odmiennych s ſtatecznémi, które w granicach nikną. Więc w zrównaniu zawieraiacém ilości odmienne różnych wymiarów, odnoſząc te ilości odmienne do ſwych granic, wſzyſtkie terminy niżſzych wymiarów nikną przed wyżſzémi. Oſtrzegámy ſobie, że ten przykład wzięliśmy tylko dla obiaśnienia barziey niż dowodu, żeby nám kto przeciwieńſtwa w naſzych rozumowaniach nie zarzucił, na które my mámy pilną uwágę. Poydźmy iuż do drugiego przypadku, wyſtawiwſzy ſobie że w zrównaniu podaném A, B, C, i t. d. ſą funkcyami drugiey ilości odmienney w tymże ſamym wymiarze: gdybyśmy byli w ſtanie rozwiązać takowe zrównanie, i wyrazić x przez funkcyą y i przez ilości ſtateczne, w każdém zaś takowém pierwiáſtku odnióſſzy x, y, do ſwych granic; otrzymalibyśmy terminy zamykaiące x wymierne, i funkcyą y z znakiém pierwiáſtkowym tego ſtopnia, w którym ſię x znaydowało: rozebrawſzy ieſzcze terminy pod znakiém pierwiáſtkowym na ſwe mnożniki, i w nich wymazáwſzy ilości ſtateczne dodane lub odciągnione, przyſzlibyśmy do pierwiáſtków,

które

które przez mnożenie wydadzą same terminy wymiaru naywyższego. Weźmy za przykład zrównanie 2go porządku $y^2+\frac{ex+c}{f}y=-\frac{dx^2+bx+a}{f}$

$y+\frac{ex+c}{2f}=\pm\sqrt{\left[\frac{(ex+c)^2}{4f^2}-\frac{dx^2+bx+a}{f}\right]}$, uczyniwszy $x=\frac{1}{0}$, $y=\frac{1}{0}$, zostaie się $y+\frac{ex}{2f}=\pm$ - - - $\sqrt{\left[\frac{e^2x^2}{4f^2}-\frac{x[dx+b]}{f}\right]}$, gdzie ieszcze i b zniknie, zostawiwszy $y+\frac{ex}{2f}=\pm x\sqrt{(\frac{e^2-4fd}{4f^2})}$; pierwiastek ten sam, który wypada s terminów naywyższego wymiaru $fy^2+exy+dx^2=0$. Gdyby prawda ta nie iaśniey się wydawała w ogólnym widoku własności zrównań, moglibyśmy ią do nayściśleyszego dowodu przyprowadzić, który każdy łatwo ogarnie wystawiwszy sobie, że funkcyą pod znakiem pierwiastkowym zamykaiąc same terminy z ilością odmienną n.p. y, po zniknieniu wszystkich innych terminów stałecznych, nie może bydź innego wzoru tylko $Ay^m+By^{m-1}+Cy^{m-2}$ - - $+Ey=y(Ay^{m-1}+By^{m-2}+Cy^{m-3}$ - - $+E)$, w którey znowu E w porównaniu innych zniknie, zostawiwszy funkcyą $y^2(Ay^{m-2}+By^{m-3}+Cy^{m-4}$ - - $+D)$ gdzie znowu D zniknie; i tak to niszczenie terminów ciągnąć się będzie póty, póki wszystkie niższych wymiarów terminy odpadłszy, nie zostawią samego naywyższego wymiaru Ay^m. Aże zrównanie podane iakiegokolwiek stopnia, powinno takowe zostać przy ostatnich granicach odmian, iakieby wypadło s pierwiastków ie składaiących i odniesionych do tych ostatnich granic; przeto w zrównaniu iakiegokolwiek stopnia odniósłszy ilości odmienne do óstatnich granic wzrostu, wszystkie terminy niższych wymiarów nikną przed terminami wymiaru naywyższego: odniósłszy zaś te ilości odmienne do

né do oſtatnich granic ubywaniá, terminy wyżſzych wymiarów nikną przed terminami wymiaru náyniżſzégo. Drugą tę część teraźniéyſzégo twiérdzeniá łatwo ieſt bárzo s tych ſamych początków dowieśdź. Zagłębiwſzy zaś myśl w ſamę metafizykę granic, łatwo poymiémy różné ich ſtopnie i porządki tak, iak i w ilościach ſkończonych; co nám bárzo dobrze obiaśniaią linie krzywé: ieżeli bowiem granica ilości odmiennych wprowádzá nowy związek w zrównanié, a przez to pokazuie nową linią krzywą, do któréy ſię liniá podaná zbliżała; ta nowá liniá będąc granicą piérwſzéy, może miéć także za granicę inną linią, a przeto odnioſſzy ią znowu do ſwéy granicy, ilości odmienné ſtaną ſię powtornie nieſkończenie wielkiémi, a czém były w piérwſzéy granicy ilości ſtateczné względém odmiennych, tém będą w granicy drugiéy ilości odmienné piérwſzégo ſtopnia względém ſtopnia wyżſzégo: tak dalece, że iako nie ieſt żádną nieprzyzwoitością wyſtawić ſobie ſzereg granic, przez który linie krzywé zniżaiąc ſię w porządkach, przechodzą, owſzem zdaie ſię bydź konieczną właſnością rozlegle ogarnionych odmián, wnoſić, że liniá krzywá którá była granicą pewnéy linii, może miéć także ſwoię granicę, i ta nowá także ſwoię; tak nie ieſt żadną nieprzyzwoitością wyſtawić ſobie różné porządki ilości nieſkończenie wielkich.

$A, \infty, \infty^2, \infty^3, \infty^4, \infty^5, \infty^6 \;--\; \infty^\infty.$

tén poſtęp zaczyná ſię od ilości ſtatecznéy A, i każdy termin poſtępu niknie przed naſtępuiącym w zrównaniu. Skąd łatwo nám ieſt zrozumiéć co znaczą w dziełach Geometrów ilości nieſkończenie wielkié, nieſkończenie większé od innych nieſkończonych: Zaiſte ięzyk naſz na iaſnych zaſadzony obrazach té ſamé znaczeniá w innych zamyká ſłowach; i co Geo-Geometrowie mówią, że ∞^2 ieſt nieſkończenie większém od ∞; ∞^3 ieſzcze nieſkończenie większém od ∞^2: i t. d. to my wyrażámy, że granice drugié ilości odmiennych przeſzedłſzy wſzyſtkié wzroſty

ſkończone, i wſzyſtkié wzroſty granic piérwſzych, nie mogą bydz powiękſzone ani zmniéyſzone żadną ilością ſkończoną, ani żádną ilością s piérwſzych granic; a przeto iak ilości ſkończone, tak ilości granic piérwſzych nikną przed niemi: toż ſamo twiérdzić powinniśmy o granicach drugich względem trzecich, o trzecich względém czwártych, i ogólnie względém granicy m, o wſzyſtkich ią poprzédzaiących. Té atoli właſności nie ſłużą tylko różnym potęgom téyże ſaméy ilości: bo ieżeli n.p. zrównanie zamyká w ſobie różne potęgi x, i oprócz tego potęgi y, z, i innych więcéy ilości odmiennych; wſzyſtkié potęgi niżſzé nikną przed potęgą náywyżſzą x, w ſwoiéy granicy; tak iako potęgi y przed náywyżſzą potęgą y; ale żádná potęgá niżſzá y nie może niknąć przed potęgą wyżſzą x, ani potęga z przed potęgami wyżſzémi x albo y. Potęga bowiem piérwſzá y albo z, może bydź równą wyżſzym potęgom x, a przeto w granicy wzroſtu zniknąć przed niémi nie może.

Wyſtáwmy ſobie teráz ułomek $\frac{A}{B}$ będący funkcyą ilości odmiénnych wzráſtaiących: ieżeli w nim A zamyká wyżſzą potęgę ilości odmiennych iak B, w porównaniu tego ułomku ilości ſkończone niknąć będą w granicy wzróſtu; ieżeli zaś B zamyká wyżſzą potęgę iak A, ułomek taki zniknie przy ilościach ſkończonych, a maiąc ſzereg ułomków, których mianowniki roſną w potęgach ilości odmiennych n.p. $\frac{A}{Bx}$ $+\frac{C}{Dx^2}+\frac{E}{Fx^3}+\frac{G}{Hx^4}$ - - $\frac{U}{Wx^n}$; ieżeli liczniki ſą iednégo wymiáru z wſpół-czynnikami mianowników, przy granicy wzroſtu x, wſzyſtkie ułomki zniknąą przed piérwſzym $\frac{A}{Bx}$, iako przed náyniżſzą potęgą mianownika: tak właśnie iak maiąc ſzereg potęg

wzráſtaiących w iákiémkolwiek zrównaniu $Ax+By+Cxy+Dx^2+Ey^2+Fx^3+$ i t. d. $=o$, gdzie ilości odmienne x, y, ubywaią; ódnioſſzy ie do oſtatniéy granicy ſwego ubywaniá, wſzyſtkie potęgi wyżſzé tego zrównaniá znikną przed náyniżſzą, zoſtawiwſzy $Ax+By=o$.

§. XVIII.

Stoſówanie po przédzaiącéy teoryi do linii krzywych.

Té początki prowadzą nás do barzo ważnéy i rozległéy teoryi linii krzywych. Maiąc zrównanié iakiégokolwiek ſtopnia $P+Q+R+S$ - - - $+V=o$, w którém P ieſt funkcyą dwóch ilości odmiennych wymiaru n; Q funkcyą tychże ilości wymiaru $n-1$; R wymiaru $n-2$; S wymiaru $n-3$; i t. d. te ilości wzráſtaiąc lub ubywaiąc zbliżaią ſię do iednéy z dwóch granic, i poddaią nám dwa gatunki dociekáń cale różné i oddzielné: zaſtanówmy ſię teráz nad piérwſzym wypádaiącym z wzroſtu tychże ilości. Scigaiąc myślą takowé wzroſty ilości odmiennych aż do oſtatnich granic, terminy niżſzych wymiarów znikną przed terminami wymiarów wyżſzych, a zrównanié podané wyrażaiąc linią krzywą, odmieni ſię w téy granicy na zrównanié cale inſze, wyrażaiącé naturę linii próſtéy lub krzywéy, do któréy ſię liniá podaná zbliżała. Nowá ta liniá, którąśmy ledwonieſtyczną nazwali, zawartá ieſt w terminie náywyżſzégo wymiaru. A iako natura linii zawiſła od natury piérwiáſtków, roſtrząſaiąc piérwiáſtki lub mnożniki terminu wymiaru náywyżſzégo, dowiémy ſię náprzód s piérwiáſtków rzetelnych lub uroionych czy takowá liniá ieſt podobná lub nie: powtóre, iakiégo ieſt porządku i natury. A iako ciąg linii krzywéy zawiſł od ciągłych wzroſtów wſpół-uſzykowanych maiących zawſze wártość rzetelną aż do oſtatnich ſwoich granic; przy tych zaś granicach té wſpół-uſzykowané zoſtaią ſię przy wártościach zawartych w ſamym terminie náywyżſzégo wymiaru; ieżeli té wártości w terminie náywyżſzégo wymiaru ſtaią ſię

uroioné,

uroione, wnosi się oczywiście, że te wzrosty rzetelne w pewney odległości skończoney ustały, a z niemi ciąg linii krzywey; a przeto że linia krzywa nie maiąc żadnych granic i ledwo-niestycznych podobnych, nie ma odnóg nieskończonych. Podobieństwo więc lub niepodobieństwo ledwo-niestycznych nauczy nas, czy linia krzywa ma odnogi nieskończone lub nie: to zaś podobieństwo zawarte iest w naturze pierwiastków lub mnożników terminu wymiaru naywyższego. Cała więc uwaga nasza zatrzymać się powinna nad mnożnikami terminu P naywyższego wymiaru w zrównaniu nayogólnieyszem $P+Q+R+S$ - - $+V=o$; ieżeli P zawiera wszystkich mnożników uroionych, co bydź nie może tylko kiedy zrównanie iest stopnia parzystego; wzrosty ilości odmiennych nie maiąc żadnych granic, ustały w odległości skończoney; i linia krzywa takowem zrównaniem opisana nie ma żadnych ledwo-niestycznych, ale cała się zamyka w odległości skończoney.

Przypuśćmy że P zawiera iednego mnożnika rzetelnego $p=ay-bx$, wszystkich zaś innych uroionych, które wyrażemy przez M; M będąc wymiaru $n-1$: zrównanie więc podane będzie:

$$pM+Q+R+S+ V=o;\ p=\frac{-Q}{M}-\frac{R}{M}-\frac{S}{M} - - - -\frac{V}{M}.$$

podług pierwszych warunków przywiązanych do każdego terminu zrównania podanego, M będąc iednego wymiaru z Q; ułomek $\frac{Q}{M}$ nie ma żadnego wymiaru: we wszystkich zaś innych ułomkach $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$ i t.d; wymiar mianownika tem iest większy od wymiaru licznika, im terminy są odległeysze: więc odniósłszy ilości odmienne do ostatnich granic podług wyższych początków; terminy wszystkie znikną, zostawiwszy $p=-\frac{Q}{M}$ - - - (α), a przeto zrównanie (α) wy-

rażą ledwo-niestyczną, do którey się linia podana w takim przypadku zbliża, i w którą się przy ostatniey granicy zamieni. Ale kiedy dwie ilości odmienne x, y, staną się u ostatnich granic nieskończonemi, stósunek ich będzie koniecznie stósunkiem skończonym, zawieraiącym w sobie kondycyą do wprowadzenia w Q, M, ażeby te funkcye należące przedtem do linii krzywey podaney, przywiązać teraz do iey ledwo-niestyczney. Stósunek ten wyciągnąć nam potrzeba z zrównania $p=ay-bx$, które rozdzieliwszy przez ax, otrzymamy $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}+\frac{p}{ax}$, odniosłszy x do swey granicy, $\frac{p}{ax}$ zniknie; a stósunek ilości odmiennych będzie $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$: należy więc w Q, M, włożyć b za y, a za x; a tym sposobem zrównanie (α) wyrazi linią prostą będącą ledwo-niestyczną linii krzywey podaney.

Przykład: Niech będzie zrównanie na linią krzywą $y^3-x^3-2ax^2-c^2=0$; znosząc ie z zrównaniem ogólnem, mamy $y^3-x^3=P$, $2ax^2=-Q$, $c^2=-R$; ponieważ $y^3-x^3=(y-x)(y^2+yx+x^2)$ przeto $M=y^2+yx+x^2$, $ay-bx=y-x$, to iest $a=b=1$:

$p=\frac{-Q}{M}=\frac{2ax^2}{y^2+yx+x^2}$, $\frac{y}{x}=1$, włożywszy więc w $\frac{2ax^2}{y^2+yx+x^2}$, $y=1$, $x=1$, wypada $y-x=\frac{2a}{3}$, czyli $3y-3x-2a=0$. zrównanie na linią prostą która iest ledwo-niestyczną linii krzywey podaney.

Ledwo-niestyczne proste będąc granicami pewnych linii krzywych, nie tak nam dokładnie daią poznać ich naturę, iak inne linie krzywe, iuż nam skąd inąd znane. Tamte bowiem nie uczą nas dokładnie o liczbie odnóg nieskończonych linii podaney; gdybyśmy

zaś

zaś wiedzieli że linia krzywa ma za granicę inną liniią krzywą prościeyszą; znaiąc tey ostatniey własności i liczbę odnóg nieskończonych, przyszlibyśmy łatwo do poznania odnóg nieskończonych linii podaney. Potrzeba nam więc od ledwo-niestycznych prostych przyiśdź do poznania ledwo-niestycznych krzywych, to iest znalazłszy linią prostą iako ledwo-niestyczną linii podaney, szukać nam iesźcze potrzeba inney linii krzywey, którąby miała też linią prostą za ledwo-niestyczną, a tak maiąc dwie linie krzywe maiące iednę spólną granicę, wnieść możemy, że iedna s tych linii krzywych iest granicą drugiey: zawsze zaś linia prościeysza lub niższego porządku iest granicą linii zawikleyszey. Przekonywa nas o tey ostatniey prawdzie teorya granic, biorąc bowiem ilości odmienne za nieskończone, w porównaniu ich terminy niektóre odpadaią w zrównaniu, i zniżaią ie o pewny stopień; i lubo ta prawda znayduie swoie wyięcia, iednakowóż okazuie się w większey liczbie linii krzywych: a rozumuiąc z ogólney uwagi i z własności zrównań w §. 20. Algebry wyłożoney; twierdzić można, że linia krzywa iakiegokolwiek porządku może mieć za granice linie krzywe wszystkich porządków niższych.

Iakimże zaś sposobem od ledwo-niestycznych prostych przyiśdź do krzywych? zależy to od przerobienia zrównania podanego na inne, w którémby u ostatnich granic ilości odmiennych większa liczba terminów ocalała. Ieżeli bowiem dwa pozostałe terminy $P+Q=o$ zrównania podanego dały ledwo-niestyczną prostą; zostawiwszy ich n.p. trzy; otrzymamy linią krzywą, która będzie ledwo-niestyczną linii podaney. Na ten koniec przenieśmy oś na samę ledwo-niestyczną prostą: na czém zyskamy naprzód, że w granicy linii krzywey nie obie razem współ-uszykowane staną się nieskończonémi, a przeto nie wszystkie terminy niższych wymiarów znikną przed terminem wymiaru naywyższego: powtóre że oś ta będąc ra-

zém osią linii krzywéy szukanéy, a zamkniętéy w zrównaniu $P+Q+R+S$ - - $+U=o$ - - (X), potrafiémy za pomocą rachunku i rozumowaniá przeniéść współ-uszykowané do iéy odnóg. Chcąc nowé té współ-uszykowané wyrazić przez funkcyą dáwnych; weźmy na fig. 28. fig. 28. linią AB za oś nową, czyniącą z osią przeszłą AL kąt LAB, którégo $Stycz. = \frac{b}{a}$, a przeto

$Wstawa = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; $Dostawa = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Idzie nám teráz o zamianę współ-uszykowanych $AP=x$, $PM=y$, na $AB=t$, $BM=u$. Poprowadziwszy DP równo-ległą MB; PC równo-ległą AS; mámy $DP = AP.Wst.PAD = \frac{xb}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; $AD = \frac{xa}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; $PC = PM.Wst.PMC = \frac{yb}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; $MC = \frac{ya}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; a przeto $t = AB = \frac{xa+yb}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; $u = MC - PD = \frac{ya-xb}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; z dwóch tych zrównáń za pomocą eliminacyi otrzymámy $x = \frac{at-bu}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $y = \frac{au+bt}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; kładąc więc w zrównanié (X), za x, y, dopiéro znalezioné wártości, przerobiémy ié na inne między t, u. Zebyśmy zaś to przerobioné zrównanie w całéy wystawili ogólności, należy nám w wártościach każdégo términu zamknąć wszystkié mnogości z t, u, składaiącé potęgę każdému terminowi właściwą. Dlá uproszczeniá iednak rachunku wszystkié współ-czynniki P wyrażémy przez α; współ-czynniki Q przez β; R przez γ, S prze δ; co nic nie narusza ogólności dociekáń; będzie przeto:

$P = \alpha t^{n-1}u + \alpha t^{n-2}u^2 + \alpha t^{n-3}u^3 + \alpha t^{n-4}u^4 +$ i t. d.

$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \beta t^{n-4}u^3 +$ i t. d.

$R=$

$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 +$ i t.d. - - - (Y).
$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 +$ i t. d.
$T = \varepsilon t^{n-4} + \varepsilon t^{n-5}u + \varepsilon t^{n-6}u^2 + \varepsilon t^{n-7}u^3 +$ i t. d.

w używaniu tych wártości potrzeba nám mieć wzgląd na liczbę mnożników uważanych w P: té mnożniki wyrażać będzie ilość odmienná u; tak dalece, że ieżeli P zamyka iednego mnożnika rzetelnégo, weźmiémy z wártości na P termin piérwſzy $at^{n-1}u$, gdzie u wyrażá nám tego mnożnika; i dlá tey ci to przyczyny w P nie wchodzi termin αt^n. Ieżeli w P uważać będziémy dwóch mnożników równych, weźmiémy z P termin $\alpha t^{n-2}u^2$; ieżeli trzech mnożników równych, termin $\alpha t^{n-3}u^3$, i t. d. co ſamo má ſię rozumiéć o funkcyach Q, R, S, i t. d. ieżeli takowé mnożniki zamykać będą.

Wróćmy ſię teráz do piérwſzégo przypuſzczeniá w zrównaniu (X); uważaliśmy w iego terminie P náywyżſzégo wymiaru, iednégo mnożnika rzetelnégo, i otrzymaliśmy zrównanié na ledwo-nieſtyczną $P+Q=o$, to zrównanié w nowych wſpół-uſzykowanych wypádá $\alpha t^{n-1}u + \beta t^{n-1} = o$, t bowiem ſtáwſzy ſię nieſkończonym, wſzyſtkié terminy w P znikną przed piérwſzym; i wſzyſtkié także w Q przed βt^{n-1} znikną, zoſtawiwſzy $\alpha t^{n-1}u + \beta t^{n-1} = o$, czyli - -

$u = -\frac{\beta}{\alpha} = c$, zrównanié na linią proſtą równo-ległą osi. S tego trzeba nám przyiśdź do zrównaniá na linią krzywą przez naſtępuiącé rozumowanié: terminy w P, Q, i terminy niżſzych wymiarów R, S, T, i t. d. dlá tego powinny były zniknąć w granicach ilości odmiénnych, że nie náleżą do natury ledwo-nieſtycznéy próſtéy, ale tylko do punktów linii krzywéy podanéy. Ieżéli niknącé té terminy utrzymámy, wprowadziwſzy na u taką wártość, iaká mu w granicy ſłużý; zamiéniémy zrównanié (X), na takié, iakié bydź powinno przy oſtatniéy granicy, co

do u; a wprowadziwszy znowu kondycyą należytą na t, ieżeli to zrównanié będzie wyrażać linia krzywą, ta będzie granicą linii zamkniętéy w zrównaniu (X), kładąc więc we wszystkié niknącé terminy za u, c; za $\alpha u+\beta = u-c$, otrzymamy:

$(u-c)t^{n-1}+t^{n-2}(\alpha c^2+\beta c+\gamma)+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)$, $+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+$ i t. d.$)$ + i t. d. $+V=o$, V będąc funkcyą samych ilości stałecznych - - (Z).

Zrównanié (Z) iuż nie iest na linią krzywą podaną, ale na inną linią krzywą maiącą ledwo-niestyczną spólną z linią podaną. Rozdzielmy ié całé przez t^{n-1}, i wszystkié współ-czynniki stałeczné wyraźmy przez A', B', C', i t. d. wypadnie nam:

$$u-c+\frac{A'}{t}+\frac{B'}{t^2}+\frac{C'}{t^3}+\frac{D'}{t^4}\ldots\frac{V}{t^{n-1}}=o \quad (Z').$$

odniósszy teráz t do swéy granicy, wszystkié potęgi t wyższé w mianownikach, zniszczą terminy następującé po $\frac{A'}{t}$ iako potędze náyniższéy, i zostanie się zrównanié na ledwo-niestyczną $u-c+\frac{A'}{t}=o$. któré że należy do Hyperboli między ledwo-niestycznémi, uczy nás tego §. 16; aże zrównanie $u-c+\frac{A'}{t}=o$ wyráżá tylko dwie odnogi nieskończoné w Hyperboli, dowodzi nam, że liniá iakiégokolwiek porządku opisaná zrównaniém (X), maiąc tylko iednégo mnożnika rzetelnégo w P; má dwie odnogi nieskończoné m iesząiącé się z dwiemá odnogami Hyperboli w granicach ilości odmiénnych: znaiąc więc położenie odnóg hyperbolicznych, widzémy zaráz iakié także mieć powinny położenié odnogi nieskończoné linii podanéy. Gdyby drugi termin w zrównaniu (Z') nie znaydował się, co się przytrafi kiedy $\alpha c^2+\beta c+\gamma=o$, na tén czás termin $\frac{B'}{t^2}$ będzie náywiększym, przed którym

wſzyſtkié naſtępuiące znikną, zoſtawiwſzy zrównanie na ledwo-nieſtyczną $u-c+\frac{B'}{t^2}=o$; a ieżeli ieſzcze $B'=o$, zrównanié na ledwo-nieſtyczną będzie $u-c+\frac{C'}{t^3}=o$, to ieſt: w przypádku zniknienia których terminów, brać potrzeba záwſze naſtępuiący, który z $u-c$ dá zrównanié na ledwo-nieſtyczną; a gdyby wſzyſtkié po piérwſzym znikły, zoſtanie ſię $u-c=o$ na linią proſtą równo-ległą osi, która w odległości nieſkończonéy zmięſzá ſię z linią krzywą podaną. S czego ſię pokazuie, że im niedoſtatecznieyſzé ieſt zrównanié (Z') co do liczby terminów, kiedy cale wſzyſtkié nie znikną; tém liniá krzywá będącá ledwo-nieſtyczną linii podanéy, ieſt wyżſzégo porządku.

Przykład. Szukaymy ledwo-nieſtycznéy krzywéy, linii zamkniętéy w zrównaniu $y^3-x^3-2dx^2-c^2=(y-x)(y^2+yx+x^2)-2dx^2-c^2=o$: ponieważ w teraznieyſzym przykładzie $a=1$, $b=1$; ſtyczná kątá LAB na fig. 28. $=1$, to teſt kąt nowéy osi s przeſzłą ieſt 45°. a przeto $x=\frac{t-u}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{u+t}{\sqrt{2}}$; włożywſzy za x, y, té wártości w zrównanié podané, zamieniémy ié na $\frac{6t^2u+2u^3}{2\sqrt{2}}-\frac{2dt^2-4dtu+2du^2}{2}-c^2=o.$ Fig. 28.

w oſtatniéy granicy $2u^3$ zniknie przed $6t^2u$, i zoſtanie ſię $\frac{3t^2u}{\sqrt{2}}-dt^2=o$. - - $u=\frac{d\sqrt{2}}{3}$, włożywſzy za u tę wártość w terminy niknącé zrównaniá przedoſtatniégo; i rozdzieliwſzy całé przez t^2, otrzymámy

$$3u-d\sqrt{2}+\frac{4d^2}{3t}-\frac{2d^3}{9t^2}+\frac{d^3.2.\sqrt{2}-2c^2.\sqrt{2}}{27t^3}=o.$$

a odnióſſzy t do oſtatniéy granicy, wypadá $3u-d\sqrt{2}+\frac{4d^2}{3t}=o$. Zrównanié na Hyperbolę, któréy

 dwie

dwie odnogi nieskończone mięszaią się z dwiema odnogami linii podaney w ostatniey granicy ilości odmiennych.

§. XIX.

Ledwo-nieśtyczné na dwa mnożniki rzetelne w termie náywyższego wymiáru.

Niech termin náywyższego wymiaru P zamyka dwóch mnożników rzetelnych; te mogąc bydź równe, lub nierówne, rozdzielą uwagę naszę na dwa przypadki. Niech náśámprzód dwa te mnożniki będą nierówne $p=ay-bx$, $q=cy-dx$, $P=(ay-bx)(cy-dx)M$, M będąc wymiaru $n-2$, idąc za tem samem rozumowaniem na każdego w szczególności mnożnika, iakiegośmy użyli w §. poprzedzaiącym, znáydziemy na ledwo-niestyczną odpowiadaiącą p, zrównanie, $p=\frac{-Q}{(cy-dx)M}$, aże w ostatnich granicach wzrostu $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$; przeto $p=\frac{-Q}{(cb-da)M}$, gdzie ieszcze w Q, M, kłaśdź należy b za y, a za x: tym sposobem przyidziemy do ledwo-niestyczney prostey, s którą się liniá krzywá w odległości nieskończoney zmięszá; przerobiwszy współ-uszykowane x, y, na t, u; i szukaiąc ledwo-niestyczney krzywey tym samym sposobem iak w §. poprzedzaiącym, znaydziemy zrównanie na dwie odnogi Hyperboli wzoru $u-c+\frac{A'}{t}=0$. Drugi mnożnik $q=cy-dx$ przyprowadzi nás do zrównaniá na ledwo-niestyczną . . . . $q=\frac{-Q}{(ay-bx)M}$, aże $\frac{y}{x}=\frac{d}{c}+\frac{q}{cx}$, w ostatniey zaś granicy $\frac{y}{x}=\frac{d}{c}$, przeto $q=\frac{-Q}{(ad-bc)M}$, gdzie w Q, M, włożyć należy d za y, c za x, co nás przyprowadzi náprzód do drugiey ledwo-niestyczney prostey; ta zaś, przerobiwszy współ-uszykowane x, y, na t, u; do drugich dwóch odnóg Hyperboli: przeto liniá krzywá opisaná zrównaniem $P+Q+R+S$ . . $+U=0$.

$+U=o$. w ktoré́m termin P náywyżſzé́go wymiáru zamyká dwóch mnożników rzetelnych nierównych; má cztery odnogi nieſkończoné, mięſzaiące ſię s czteréma odnogami Hyperboli w oſtatnich granicach iłości odmiénnych.

Niech iuż P zamyká dwóch mnożników rzetelnych równych, czyli niech będzie $p=q$, a zrównanié na linią podaną wyrazi ſię: $(ay-bx)^2M+Q+R+S+T$ - - $+U=o$; czyli $(ay-bx)^2+\frac{Q}{M}+\frac{R}{M}+\frac{S}{M}+$ i t. d. $+\frac{U}{M}=o$; M będąc wymiaru $n-2$, widzé́my oczywiście że $\frac{R}{M}$ zoſtáwſzy bez żádné́go wymiaru, náleży do ledwo-nieſtyczné́y; lubo zaś w $\frac{Q}{M}$ licznik przewyżſzá iednym wymiaré́m mianownika, nie może iednak $\frac{Q}{M}$ u oſtatnich granic ſtać ſię nieſkończoné́m, bo gdyby tak było, wſzyſtkié terminy zrównaniá znikłyby przed nim, zoſtawiwſzy $\frac{Q}{M}=o$, byłoby więc $\frac{Q}{M}$ razem granicą roſnących i ubywaiących iłości, co ieſt przeciwné wſzyſtkim rozumowaniom. Nie tylko zaś ta rażącá nieprzyzwoitość, ale nawet piérwſzé początki teraźniéyſzéy teoryi przekonywaią nás, że $\frac{Q}{M}$ náleżąc równie do ledwo-nieſtycznéy, iako i $(ay-bx)^2$, ieden mnożnik zbywaiący w $\frac{Q}{M}$, będzie funkcyą x, y, na wſpół-uſzykowané nowé́y linii rodzącé́y ſię z linii podané́y w granicach. Zrównanié na tę nową linią $(ay-bx)^2+\frac{Q}{M}+\frac{R}{M}=o$, ieżéli ſię nie będzie mo-

gło rozebrać na dwa wymiérné piérwſzégo ſtopnia, wyráżá linią krzywą drugiégo porządku, która ſię zmięſzá w granicy wſpół-uſzykowanych, z linią podaną. Zebyśmy tę linią w prościéyſzym otrzymali wyrazie, i wſzyſtkié ſzczégólności do teraźniéyſzégo przypuſzczeniá przywiązané poznali, odmieńmy zno wu wſpół-uſzykowané x, y, na t, u, kładąc $x = \frac{at-bu}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $y = \frac{au+bt}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, i wſzyſtkie § poprzédzaiącégo warunki utrzymáwſzy, będzie:

$$P = \alpha t^{n-2}u^2 + \alpha t^{n-3}u^3 + \alpha t^{n-4}u^4 + \text{ i t. d.}$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \text{ i t. d.}$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \text{ i t. d.}$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \text{ i t. d.}$$
$$+ \text{ i t. d.}$$

ieżeli P zamyká dwćch mnożników równych, wſzyſtkié zaś terminy naſtępuiących wymiarów Q, R, S, znayduią ſię, i żádnégo takiégo mnożnika nie zawiéraią; wypádá zrównanié na ledwo-nieſtyczną - - $\alpha t^{n-2}u^2 + \beta t^{n-1} + \gamma t^{n-2} = 0$. czyli $\alpha u^2 + \beta t + \gamma = 0$. któré wyráżá Parabolę: w niéy na $t = \infty$, u ſtaie ſię także ∞, i liniá podaná ma dwie odnogi nieſkończoné mięſzaiącé ſię z dwiéma odnogami Paraboli w granicy ilości odmiennych. Ieżeli zaś Q zamyká iednégo takiégo mnożnika iakich zamyka P, zrównanié na ledwo-nieſtyczną ieſt - - - -

$$\alpha t^{n-2}u^2 + \beta t^{n-2}u + \gamma t^{n-2} = 0, \text{ czyli } \alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0. \text{ - - } (B'')$$

któré wyráżá dwie linie proſté równo-ległé ieżeli γ ieſt odiemném, albo będąc dodatném, $\beta\beta > 4\alpha\gamma$; ale ieżeli $\beta\beta < 4\alpha\gamma$; liniá podaná nie má żádnéy ledwo-nieſtycznéy, a przeto żadnéy odnogi nieſkończonéy. Zrównanie ieſzcze (B'') złożoné z mnożników rzetelnych równych lub nierównych poſłużyć nám może do wynalezieniá ledwo-nieſtycznéy krzywéy, kładąc wártości z niégo wyciągnioné w terminy niknącé zrównaniá

wnaniá podanégo: na piérwiáſtki dwa nierówné, znáydziémy takié ſamé wypádki, iakie ſię pokázały na początku teraźniéyſzégo §. uwáżaiąc takowych mnożników w P. Na piérwiáſtki zaś równé w (B''), wyraziwſzy ie przez $(u-c)^2$ otrzymámy zrównaniá

$$(u-c)^2+\frac{A}{t}=o, \text{ albo } (u-c)^2+\frac{A'}{t^2}=o, \text{ albo } (u-c)^2$$

$$+\frac{A''}{t^{n-2}}=o,$$ ieżeli terminy zawiéraiącé $t^{n-3}, t^{n-4}, t^{n-5}$ i t. d. nie znayduią ſię w zrównaniu. A gdyby ieſzcze w zrównaniu $(u-c)^2t^{n-2}+At^{n-3}+A't^{n-4}+A''t^{n-5}+$ i t.d. $=o$. gdzie A, A', A'', i t. d. ſą funkcyami ſamych ilości ſtatecznych, dlá wprowadzonéy wártości c za u w terminy niknącé, gdyby mowię ieſzcze w tém zrównaniu wſpół-czynnik t^{n-3} zamykáł mnożnika $u-c$; przybyłby ieſzce ieden termin na ledwo-nieſtyczną, i zrównaniá któreby na ten czás wypadły, ſą $(u-c)^2+$

$$\frac{A(u-c)}{t}+\frac{A'}{t^2}=o, \text{ lub } (u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{A''}{t^3}=o \ldots$$

i ogólnie $(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{A'}{t^{n-2}}=o$, a gdyby ieſzczé drugi takowégo zrównaniá termin był zero, a trzeci zawiéráł mnożnika $u-c$, potęga t w mianowniku terminu drugiégo powiękſzyłaby ſię, biorąc termin naſtępuiący. Zgoła uwáżaiąc w zrównaniu na ledwo-nieſtyczną termin oſtatni zero, a biorąc záń terminy naſtępuiącé, potęga tego oſtatniégo terminu powiękſzy ſię aż do $n-2$; uwáżaiąc zaś naſtępnie termin śrzedni zero, a w naſtępuiącym mnożnika $u-c$; wpádámy na zrównanié wzoru $(u-c)^2+\ldots$

$$\frac{A(u-c)}{t^p}+\frac{A'}{t^q}=o.$$ Podobné wypádki znáydziémy, uwáżaiąc w zrównaniu $P+Q+R+S$ i t. d. $+V=o$, i przerobioném na wſpół-uſzykowané t, u, $Q=o$, lub $R=o$, i t. d. a biorąc zaráz naſtępuiący termin na miéyſce niknącégo.

Ktokol-

Ułatwienie trudności zachodzącey w tym rachunku.

Ktokolwiek nie przywykł ieszcze do tych delikatnych rozumowań, s których teraźnieyszá wypádá teoryá, mogłby znaleśdź trudność w poięciu, czemu $u-c=o$ wypádłszy z zrównaniá pierwiástkowego na ledwo-niestyczną; w zrównaniu powtórnem iakié są $(u-c)+\frac{A}{t}=o$, §. poprzedzaiącego; lub teráz $(u-c)^2+\frac{A}{t}=o$ i t. d. traci tę pierwszą wartość, i nie staie się zero? Ta trudność ułatwiá się pierwszą uwágą nad nászemi działaniami. Uważaiąc same tylko terminy pierwsze zrównaniá $P+Q+R+S$ - - $+V=o$, otrzymaliśmy $u-c=o$, to iest tego mnożnika rzetelnego w P, Q, którego zrównanie podané zawiérá w terminach náywyższych wymiarów, tén mnożnik $u-c$ byłby zawsze zero, gdyby żáden termin prócz náypierwszych, w zrównaniu nie ocalał. Ale iak prędko uwági insze, i natura samych ilości odmiennych zostawuią więcey terminów w zrównaniu podaném, iuż na tén czás $u-c=o$. nie może miéć mieysca. Wszakże gdybyśmy mieli zrównanie algebraiczné $(u-c)M=o$, mámy prawo twierdzić że $u-c=o$ iest pierwiástkiem tego zrównaniá; ale gdyby w tém zrównaniu przybył termin L, $(u-c)M+L=o$, L nie zamykaiąc $u-c$; poznaie każdy że iuż w tém ostatniém zrównaniu $u-c$ nie może bydź zero. Gdybyśmy zaś chcieli na drugą iaką ilość odmienną t, wyciągnąć wártość zawartą w zrównaniu $(u-c)M+L=o$, i w tey wártości ocalić kondycyą na u, zrównaniá $(u-c)M=o$; nie moglibyśmy w pierwszym terminie kłaśdź c za u, ale tylko w terminie L; ináczey zrównanie $(u-c)M+L=o$ uczynilibyśmy iak tosamém. To rozumowanie przeniósszy do teoryi ledwo-niestycznych nie gubiąc z myśli całego łańcucha rozumowań, szukaliśmy naprzód iakiby wypádł związek współ-uszykowanych, gdyby się tylko sám pierwszy termin został w zrównaniu podaném; tén związek wypádł nám w zrównaniu na linią prostą: szukaliśmy potém linii krzywey, którąby miała za ledwo-niestyczną

czną też linią prostą; to iest, któréyby zrównanié w terminie náywyższégo wymiaru zawiérało tego samégo mnożnika 1go stopnia; dlá czégo podług kondycyi założonéy, piérwszégo mnożnika $u-c$, w terminie P nie náleżało nám narusząć, ale wszystkié odmiany wprowádząć w same tylko terminy niknącé. Iakiéż miały bydź te odmiany? oto żeby związek na linią podaną cale w inny zamienić, tak iak się liniá krzywá s całémi własnościami odmiéniá w granicach: więc náleżało nadadź którey współ-uszykowanéy taką wártość, iaká linii podanéy nie może służyć: powtóré żeby tén związek zamiéniony nie wyrażáł innéy linii, tylko maiącéy ledwo-niestyczną prostą zamkniętą w zrównaniu $u-c=o$, a przeto náleżało nám w té niknącé terminy kłaśdź c za u. To rozumowanié dobrze obięté obiaśnić powinno náymnieyszą ciemność naszych myśli, ieżeliby się s poprzédzaiących działań iesżcze zostałá. Przystąpmy do przykładu.

Zrównanié náyogólnieyszé na linié 2go porządku iest
$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2=o.$$
w niém termin náywyższégo wymiaru $fy^2+exy+dx^2=o$, może zamykać albo obydwa mnożniki uroioné, albo obydwa rzetelné nierówné, albo nakoniec dwa rzetelné równé: w piérwszym przypádku liniá krzywá nie má odnóg nieskończonych, i iest *Ellipsą*: na którą warunek, że $e^2<4f^2d$ w pewnéy skończonéy odległości. Nie mowiémy nic o kole, bo iuż wiémy, że koło wypádá s szczególnégo warunku na Ellipsę, to iest kiedy mimo-śrzód położémy zero, a przeto iego właśność w teraźnieyszéy uwadze iest ta sama co i Ellipsy.

Ieżeli termin náywyższégo wymiaru skłádá się z dwóch mnożników rzetelnych nierównych, to iest: $fy^2+exy+dx^2=(my-nx)(py-qx)$, otrzymámy dwa zrównaniá:
$$my-nx+\frac{cy+bx}{py-qx}+\frac{a}{py-qx}=o.$$

$$py-qx+\frac{cy+bx}{my-nx}+\frac{a}{my-nx}=o.$$

w pierwszém z nich w granicy x, y, będzie $\frac{y}{x}=\frac{n}{m}$, kładąc więc n za y, m za x; i ostatni termin iako niknący opuściwszy, otrzymámy zrównanié na ledwo-niestyczną odpowiadaiącą mnożnikowi $my-nx$,

$$my-nx+\frac{cn+bm}{pn-qm}=o \quad - \; - \; - \quad (G).$$

w drugiém ponieważ $\frac{y}{x}=\frac{q}{p}$, kładąc q za y; p za x, wypadnie zrównanié na ledwo-niestyczną odpowiadaiącą mnożnikowi $py-qx$:

$$py-qx+\frac{cq+bp}{mq-np}=o \quad - \; - \; - \quad (H).$$

Obydwa té zrównaniá na linią prostą: przeto liniá krzywá takowém zrównaniém opisaná má cztéry odnogi nieskończoné mięszaiącé się z dwiéma liniámi prostémi w swoich granicach: cośmy właśnie widzieli w Hyperboli. Chcąc od tych ledwo-niestycznych przyiśdź do linii krzywéy, odmieńmy oś, położywszy $y=\frac{mu+nt}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$, $x=\frac{mt-nu}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$, tym sposobém przerobiemy zrównanie (G) na $u+\frac{cn+bm}{(pn-qm)\sqrt{(m^2+n^2)}}=o$ - - - - - - (G'). zrównanié zaś podane na linie 2go porządku, będzie

$$[(pn-qm)u+\frac{cn+bm}{\sqrt{(m^2+n^2)}}]t+\frac{(cm-bn)u}{\sqrt{(m^2+n^2)}}+(pm+qn)u^2+a=o.$$

włożywszy we wszystkie terminy prócz pierwszégo za u, wártość wyciągnioną z (G'), i rozdzieliwszy potém całe zrównanié przez t, otrzymámy:

$$(pn-pm)u+\frac{cn+bm}{\sqrt{(m^2+n)^2}}+ \quad - \; - \; - \quad (bn-$$

$$\frac{(bn-cm)(cn+bm)+(pm+qn)(cn+bm)^2}{t.(pn-qm)(m^2+n^2)}+\frac{a}{t}=o.$$

które iak widzémy ieſt wzoru $u+s+\frac{A}{t}=o$, na dwie odnogi Hyperboli. Chcąc wynaleśdź podobné zrównanié odpowiadaiącé mnożnikowi $py-qx$; kładę náprzód $y=\frac{pu+qt}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$; $x=\frac{pt-qu}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$; przez co náprzód zrównanié (H) zamieni ſię na - - - -

$$u+\frac{cq+bp}{(mq-np)\sqrt{(p^2+q^2)}}=o \quad - - - - - - \quad (H').$$

Zrównanié zaś na linie 2go porządku:

$$[(mq-np)u+\frac{cq+bp}{\sqrt{(p^2+q^2)}}]t+\frac{(cp-bq)u}{\sqrt{(p^2+q^2)}}+(mp+nq)u^2+a=o;$$

w które włożywſzy za u wártość wyciągnioną z (H'), przerobiémy ié na zrównanié wzóru $u+r+\frac{A}{t}=o$, wyrażaiącé drugié dwie odnogi Hyperboli.

Ieżeli nakoniec termin náywyżſzégo wymiaru ſkłada ſię z dwóch mnożników rzetelnych równych, czyli $fy^2+exy+dx^2=(my-nx)^2$, odmiéniwſzy wſpółuſzykowané x, y, na t, u; $y=\frac{mu+nt}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$; $x=\frac{mt-nu}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$; zrównanié podané zamiéni ſię na

$$(m^2+n^2)u^2+\frac{(cn+bm)t}{\sqrt{(m^2+n^2)}}+\frac{(cm-bn)u}{\sqrt{(m^2+n^2)}}+a=o.$$

a odnióſłſzy t do oſtatniéy granicy, wypádá na ledwo nieſtyczną - - $(m^2+n^2)u^2+\frac{(cn+bm)t}{\sqrt{(m^2+n^2)}}=o$ - - -

Zrównanié wyrážaiącé Parabolę, gdzie $t=\infty$, czyni także u nieſkończoném. Parabola więc ieſt ſamey ſiebie ledwo-nieſtyczną, czyli w oſtatniéy granicy z żadną ſię inną linią, któráby była iéy granicą, nie mięſzá.

ſzá. W przypádku $cn+bm=o$, zrównanie wyráżá dwie linie proſte: i na ten czás zrównanie podane iuż nie będzie na liniie 2go porządku, ale zrównaniem ſkładanem na dwie linie proſte.

§, XX.

Ledwo-nieſtyczné na trzy mnożniki rzetelné.

Kiedy termin P náywyżſzego wymiáru zamyká trzech mnożników rzetelnych nierównych, káżdy z nich przyprowadzi nás do ledwo-nieſtyczney proſtey opiſaney zrównaniem wzoru $p=\frac{-Q}{M}$; káżdá zaś ledwo-nieſtyczná proſtá przez ſpoſób iuż wyłożony w §§. poprzedzaiących, przyprowadzi nás do zrównaniá wzoru $u-c+\frac{A}{t}=o$, wyrážaiącego dwie odnogi nieſkończone Hyperboli; przeto liniá krzywá zamknięta w zrównaniu $P+Q+R+S$ - - $+V=o$, w teráżnieyſzym przypádku, będzie mieć ſześć odnóg nieſkończonych, mięſzaiących ſię s ſześcią odnogami Hyperbolicznemi w granicach ilości odmiennych. Ieżeli zaś P zawierá dwa mnożniki rzetelne równe, a trzeci nierówny; pierwſze dadzą za ledwo-nieſtyczną Parabolę; oſtatni náprzód linią proſtą, a s tey dopiero wypádáiące dwie odnogi Hyperboli: i liniá krzywá podaná będzie mieć cztery odnogi nieſkończone, s ktorych dwie mięſzaią ſię s Parabolą, dwie zaś s Hyperbolą w granicach ilości odmiennych: co wſzyſtko s poprzedzaiących wypływá początków. Uwáżáymy iuż w P trzy mnożniki rzetelne równe $(ay-bx)^3$: i żebyśmy wſzyſtkie ſzczególne przypádki łatwiey mogli roſtrząſać, odmieńmy wſpół-uſzykowane, biorąc $y=\frac{au+bt}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $x=\frac{at-bu}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; terminy różnych wymiárów zrównaniá podanego będą miały wártość:

$P=$ - - - - $\alpha t^{n-3}u^2+\alpha t^{n-4}u^4+\alpha t^{n-5}u^5+$ i t. d.

$Q=\beta t^{n-1}+\beta t^{n-2}u+\beta t^{n-3}u^2+\beta t^{n-4}u^3+\beta t^{n-5}u^4$

$R=$

$R= \gamma t^{n-2}+ \gamma t^{n-3}u+ \gamma t^{n-4}u^2+ \gamma t^{n-5}u^3+ \gamma t^{n-6}u^4$
$S= \delta t^{n-3}+ \delta t^{n-4}u+ \delta t^{n-5}u^2+ \delta t^{n-6}u^3+$ i t. d.

$+$ i t. d.

Ieżeli ſamo tylko P zamyka trzech mnożników równych; zrównanie na ledwo-nieſtyczną ieſt - - - $\alpha t^{n-3}u^3+ \beta t^{n-1}=o$. czyli

$$(I.)\ \alpha u^3+ \beta t^2=o,$$

które ieżeli nie może ſię rozebrać na zrównania wymierne ſtopni niżſzych, wyraża linią krzywą 3go porządku, która ieſt ledwo-nieſtyczną linii podaney. Ta ledwo-nieſtyczna może mieć dwie albo ſześć odnog nieſkończonych podług iedne̋go lub wſzyſtkich pierwiáſtków rzetelnych, a przeto tyleż odnóg pokazuie w linii podaney.

Kiedy P zámyká trzech mnożników równych; Q może zamykać iednégo takiégoż mnożnika; na tenczás żeby zrównanie całe nie było rozdzielne przez u, i warunek naſz ocalony; przybędzie do ledwo-nieſtyczne̋y termin R: to ięſt $\alpha t^{n-3}u^3+ \beta t^{n-2}u+$ - - $\gamma t^{n-2}=o$, czyli

$$(II.)\ \alpha u^3+ \beta tu+ \gamma t=o.$$

znowu na linią krzywą 3go porządku: w obydwóch zrównaniach położywſzy t nieſkończonem, u ſtaie ſię takiém: a ieżeli w drugiém tém zrównaniu uważać będziemy γt niknące przed potęgami wyżſzemi, zoſtanie ſię $\alpha u^3+ \beta tu=o$; to ieſt $u=o$, $\alpha u^2+ \beta t=o$, s których pierwſze wyráżá linią proſtą która ieſt oſią; drugie Parabolę: będzie więc mieć w takowym przypádku liniá podaná cztery odnogi nieſkończone, s których dwie zmieſzaią ſię z linią proſtą, dwie zaś s Parabolą w granicy ilości odmiennych.

Kiedy P zamyká trzech mnożników równych, niech Q zawierá dwa takie mnożniki; będzie zrównanie na ledwo-nieſtyczną $\alpha t^{n-3}u^3+ \beta t^{n-3}u^2+ \gamma t^{n-2}=o$, czyli - - $(III.)\ \alpha u^3+ \beta u^2+ \gamma t=o.$

gdzie t, u, ſtaią ſię nieſkończoné w granicy ſwoiéy: a zniſzczywſzy βu^2 iako niknącé przy αu^3, otrzymámy $\alpha u^3 + \gamma t = o$.

Niech nakoniec R zamyká iednégo mnożnika takiégo, iakich P zamyká trzech, i iakich Q zamyká dwa. Dlá wyłożonéy iuż przyczyny przybędzie nám w zrównaniu na ledwo-nieſtyczną termin z S, a przeto $\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-3} u^2 + \gamma t^{n-3} u + \delta t^{n-3} = o$, czyli

$$(IV.)\quad \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = o.$$

Zrównanié to wyráża trzy albo iednę tylko ledwo-nieſtyczną proſtą, ieżeli iedén lub trzy piérwiáſtki ſą rzetelné nierówné: oſtatni przypádek zgádzá ſię zupełnie s tym któryſmy na ſamym początku tego §. roſtrząſali: skąd ſię wnoſi, że ledwo-nieſtyczná wypádá ta ſama, uważaiąc albo w ſamym tylko P trzy mnożniki rzetelné nierówné; albo razém w P trzy, w Q dwa, a w R iednégo takiégo mnożniká. Ale że zrównanié IV. rozlegléyſzym podpádá uwágóm iak przypádek náypiérwſzy tego §: roſtrząſniymy ié wſzyſtkié porządnie. Ieżeli to zámyká iedén tylko piérwiáſtek rzetélny $u - c = o$, to ieſt $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = (u-c)(mu^2 + nu + p) = o$, kładąc c za u; we wſzyitkié niknącé terminy, odmieniémy zrównanié na

$(u-c)t^{n-3} + At^{n-4} + Bt^{n-5} + Ct^{n-6} + Dt^{n-7} +$ i t. d. $= o$, a rozdzieliwſzy całé przez t^{n-3}, i odnióſſzy potém t do oſtatniéy granicy; otrzymámy na ledwo-nieſtyczną - - $u - c + \frac{A}{t} = o$, albo $u - c + \frac{B}{t^2} = o$, albo $u - c + \frac{C}{t^3} = o$, - - albo nakoniec $u - c + \frac{V}{t^{n-3}} = o$, podług przypádku, że wſzyſtkié terminy zoſtaną, albo że $A = o$, albo że $A = o$, $B = o$; albo $A = o$, $B = o$, $C = o$; albo że nakoniec wſzyſtkié terminy prócz oſtatniégo, będą zero; a gdyby nawet było $V = o$, zoſtanie ſię $u - c = o$, co nas uczy, że liniá proſtá która ieſt granicą

nicą linii podanéy, nie iest żádnéy innéy linii krzywéy granicą, a przeto i linia podaná nie mięszá się w odległości nieskończonéy z żadną linią krzywą.

Ieżeli zrównanie IV. zamyká dwa pierwiástki rzetelné równé, to iest $\alpha u^2 + \beta u^3 + \gamma u + \delta = (u-c)^2 (mu+n)$, i ieżeli żáden inny współ-czynnik takowych mnożników nie zawierá, włożywszy za u, c; w wszystkié terminy niknącé, przyidziémy znowu na ledwo-niestyczną do iednégo s takich zrównáń $(u-c)^2 + \frac{A}{t} = o$, $(u-c)^2 + \frac{B}{t^2} = o$, $(u-c)^2 + \frac{C}{t^3} = o$ - - - $(u-c)^2 + \frac{V}{t^{n-3}} = o$.

Gdyby zaś współ-czynnik t^{n-4} zamykáł iednégo takiego mnożnika $u-c$, ná tén czás trafilibyśmy na ledwo-niestyczną zamkniętą w iedném z nastąpuiących.

$(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{B}{t^2} = o$, albo $(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{C}{t^3} = o$, albo na koniec na $(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{V}{t^{n-3}} = o$.

a gdyby ieszcze $A = o$, B zaś zamykało iednégo takiégo mnożnika; albo B będąc zero, C zamykało $u-c$, i tak daléy postępuiąc w przypuszczeniu; trafiémy koniecznie na zrównanié wzoru $(u-c)^2 + \frac{A'(u-c)}{t^p} + \frac{B'}{t^q} = o$, wyrážaiącé ledwo-niestyczną; gdzie $q < n-2$; $p < q$.

Przypuśćmy nakoniec że zrównanié IV. zamyká trzech mnożników równych $(u-c)^3 = o$. kładąc c za u, we wszystkie terminy niknącé zrównaniá podanégo między t, u; ieżeli żádén inny termin prócz pierwszégo nie zamyká mnożnika $u-c$, trafiémy na zrównanié do ledwo-niestycznéy wzoru $(u-c)^3 + \frac{A'}{t^q} = o$, $q < n-2$,

$q<n-2$, a ieżeli ieszcze współ-czynnik t^{n-4} zamyka $u-c$; na zrównanie wzoru - - $(u-c)^3+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B'}{t^q}=0$. uważaiąc zaś drugi termin następnie zero, a w tuż następuiącym mnożnika $u-c$; trafiémy na zrównanie wzoru - - $(u-c)^3+\frac{A'(u-c)}{t^p}+\frac{B'}{t^q}=0$.

Ieżeli zaś oprócz piérwszégo terminu zamykaiącégo trzy mnożniki równé, inny który z następnych zamykać będzie $(u-c)^2$, znaydziémy na ledwo-niestyczną zrównanie wzoru $(u-c)^3+\frac{A'(u-c)^2}{t^p}+\frac{B'}{t^q}=0$. Nakoniec ieżeli który s terminów zrównania zamykać będzie dwa, trzeci zaś iaki iednégo takiégo mnożnika, iakich termin piérwszy zamyka trzech; przyidziémy do zrównania na ledwo-niestyczną, którégo wzór iest: $(u-c)^3+\frac{L(u-c)^2}{t^p}+\frac{M(u-c)}{t^q}+\frac{O}{t^r}=0$.

gdzie $r<n-2$; $q<r$, $p<q$.

Té wszystkié uwági teraźniéyszégo §. przystosowáwszy do zrównania na linie 3go porządku, znáydziémy szesnaście przypádków różnych mogących mieć miéysce iuż to w mnożnikach samych piérwszégo terminu, iuż w kombinacyach z nim innych terminów zrównania. Skąd J. P. Euler wyciągnął szesnaście rodzaiów linii 3go porządku co do liczby i różnéy natury ledwo-niestycznych. Każdy zaś takowy rodzáy maiąc właściwy wzór swégo zrównania, dzielić się może na różné gatunki wypádaiącé s kondycyi wprowadzonych na współ-czynniki terminów, tak iakéśmy widzieli w porządku drugim. Newton który w dziéle swoim *Enumeratio Linearum tertii ordinis* uważał własnosci i różnice linii krzywych w odległości skończonéy, naznaczył ich siedmdziesiąt i dwa gatunki: Teorya J. P. Eulera będąc daleko prościéysza

ściéyszą i ogólniéyszą, nie tylko większą miała u Geometrów pomyślność, ale nawet daie widziéć, że liczba gatunków przez Newtona podaná ieſt niedokładna. Roſtrząſanié wſzyſtkich tych rodzaiów linii, będąc tylko przyſtósowaniém początków teraźniéyſzego §. do przykładu ſzczególnégo, nie uczyni żádnéy trudności, ktokolwiek w całéy ogólności teoryą tę ogarnął, i przypatrzył ſię działaniom na linie 2go porządku. Przydadź nám tu tylko náleży iednę włáſność ledwo-nieſtycznych ſzczególnie z uwág nad liniami 3go porządku wypádaiącą, która ieſt wielkiéy wagi i na wyżſzé porządki.

Wyſtáwmy ſobie na fig. 29. linią krzywą 3go porządku maiącą ſześć odnóg nieſkończonych, a przeto trzy ledwo-nieſtyczné proſté wypádaiącé s trzech mnożników rzetelnych nierównych, w terminie náywyżſzégo wymiaru zawartych. Ponieważ té ledwo-nieſtyczné proſté wyrážaią ſię zrównaniami wypadaiącemi z dwóch piérwſzych terminów zrównania podanégo, idzie za tém że dwa té terminy P, Q, ſą ſpólné zrównaniu 3go ſtopnia na linią krzywą, i zrównaniu tegóż ſtopnia ſkładanému, któré wyráżá trzy linie proſté. Wſpół-czynnik zaś iednéy ilości odmiennéy w Q, będąc równy ſummie piérwiáſtków; wyrážać będzie razém przyſtawy do linii proſtéy, i przyſtawy do linii krzywéy náleżące. Z równości tych przyſtáw zaſtanówmy ſię, czy iaká wážná właſność nie wypadnie. Ná tén koniec wyſtáwmy ſobie dwa zrównaniá 3go ſtopnia.

Uwága nad ledwo-nieſtycznémi wyliczonemi.

Fig. 29.

$$y^3+(bx+e)y^2+(cx^2+fx+h)y+dx^3+gx^2+ix+k=0 \quad - - - (A').$$

$$z^3+(bx+e)z^2+(cx^2+fx+H)z+dx^3+gx^2+Ix+K=0 \quad - - - (B').$$

s których piérwſzé (A') wyráżá linią krzywą 3go porządku maiącą ſześć odnóg nieſkończonych: drugié zaś (B') wyráżá trzy linie proſté: dlá tego wſpółczynniki H, I, K, wyſtáwmy ſobie takié; żeby to zrównanié mogło ſię rozebrać na trzy piérwſzégo ſtopnia; będzie więc na fig. 29. $PL+PM+PN=-bx-e$; $PF+PG+PH=-bx-e$; a przeto $PL+PM+PN=PF+$

Fig. 29.

$PG+PH$, czyli przywiódłszy ie do zero:

$FL-GM+HN=0$, i podobnie $fn-gm+hl=0$. każde s tych zrównań zamyka kondycyą wyrażaiącą istotną cechę ledwo-niestycznych, to iest: ieżeli przystawa czyli linia prosta iakakolwiek przecina we trzech mieyscach odnogi krzywe i ledwo-niestyczne; dwa odcinki tey linii prostey między ledwo-niestycznemi i odnogami krzywemi zawarte, równe są trzeciemu odcinkowi idącemu w stronę przeciwną. W liniach więc 3go porządku gdzie trzy zachodzą ledwo-niestyczne, trzy odnogi linii krzywey nie mogą zmierzać ku iedney stronie z ledwo-niestycznemi, ale ieżeli dwie wykierowane są względem odnogi ku pewney iakiey stronie, trzecia musi bydź wykierowana przeciwnie: i tak n.p. na fig. 29. odnoga SM nie może przechodzić za G, żeby się stała wklęsłą do ledwo-niestyczney BG; boby zrównanie $FL-GM+HN=0$ nie miało mieysca w takowem przypadku. Stąd się wnosi iż nie może bydź żadnego rodzaiu w liniach 3go porządku maiącego dwie ledwo-niestyczne wzoru $u=\frac{A}{t^2}$, a iednę tylko wzoru $u=\frac{A}{t}$, bo $u=\frac{A}{t^2}$ będąc nieskończenie mnieyszem od $u=\frac{A}{t}$; bydź nigdy nie może, aby dwie takie wyrównać miały iedney ledwo-niestyczney $u=\frac{A}{t}$: ale ieżeli się iedna $u=\frac{A}{t}$ znayduie przy innych wzoru $u=\frac{A}{t^2}$; druga takaż znaydować się także musi. A ieżeli niemasz żadney ledwo-niestyczney $u=\frac{A}{t}$; ledwo-niestyczna $u=\frac{A}{t^2}$ nie może się nigdy sama znaydować

Fig. 29.

dować przy innych $u = \frac{A}{t^3}$, i ogólnie żadná ledwo-nieftyczná niżfzégo porządku, nie może fię znaydować fama przy ledwo-nieftycznych porządków wyżfzych.

Ciągnąc daléy teoryą ledwo-nieftycznych na cztéry mnożniki rzetelné w terminie *P* náywyżfzégo wymiaru, i tę ftófuiąc do zrównaniá na linie *4go* porządku, uważaćby nám przyfzło w niém następuiącé przypádki. *Náprzód:* kiedy termin náywyżfzégo wymiaru zamyká wfzyftkié cztery mnożniki uroioné. *Powtóre:* kiedy zamyká dwa rzetelné nierówné, a dwa uroioné. *Potrzecié:* dwa mnożniki rzetelné równé, a dwa uroioné. *Poczwárté:* wfzyftkie cztéry mnożniki rzetelné i nierówné. *Popiąté:* mnożniki rzetelné dwa równé, a dwa nierówné. *Pofzofté:* dwą mnożniki równé, i dwa drugié równé, ale każdá párą od fiebie różná. *Pofiodmé:* kiedy trzy mnożniki rzetelné równé, a czwárty nierówny. *Poófme:* kiedy wfzyftkié cztéry mnożniki rzetelné między fobą równé. W każdym s takowych przypádków uważaiąc terminy niknącé, a biorąc inné na ich miéyfce; powtóré rościągaiąc mnożniki do dalfzych terminów, wynaleźlibyśmy wielé rodzaiów linii krzywych: a przefzedłfzy przez wfzyftkié, pokázałoby nám fię 146 rodzaiów linii krzywych *4go* porządku różniących fię ledwo-nieftycznémi, czyli odmianami, którym podlegaią w oftatnich granicach wfpół-ufzykowanych. Każdy żaś takowy rodzáy uważaiąc w odległości fkończonéy, odkrylibyśmy gatunki do niégo náleżącé. Idąc do wyżfzych porządków liczba rodzaiów wzráftać będzie co ráz barziéy, dlá tégo że fię liczba kombinacyi w mnożnikach znacznie powiękfza.

§. XXI.

Granice ilości wzráftaiących odkryły nám tylé znakomitych cech i włáfności w liniach krzywych: obiecywać fobie možná, że fą ieſzcze inné przymioty, któré od granic ilości ubywaiących zawifły. A iako

O granicach ilości ubywaiących, i od nich zawisłych właśnościach linii krzywych.

tamte wypłynąwszy ze stycznych prowadzonych do odległości nieskończoney należały do odnóg bez końca się ciągnących; tak teraźnieysze stosuiąc do stycznych pewnych łuków, odkryć nam mogą charaktery linii krzywych w odległości skończoney. Potrzebaby nam więc do niniéyszych uwag, w zrównaniu na linie iakiegokolwiek porządku, ilości odmienne przywieśdź do stanu ciągłego i nieprzestannego ubywania. Stan takowy ubywania współ-uszykowanych zmnieysza łuk linii krzywey, a w ostatniey granicy przywodzi go do punktu, lub do styczney mięszaiący się z dwiema przyległemi punktami linii krzywych. Skąd nam łatwo przewidzieć, że właśności punktów różno-rodnych iakiemi są punkta podwóyne, potróyne, poczwórne i t. d. powtóre, sposob oznaczenia i prowadzenia stycznych, zawisły od teoryi granic ilości ubywaiących. A iako w granicach wzrostu z ledwo-niestycznych prostych wynaydowaliśmy inne linie krzywe mięszaiące się w odległości nieskończoney z linią podaną; tak doświadczać będziemy, ieżeli teorya granic ilości ubywaiących nie nauczy nas o zamianie łuków iedney linii krzywey na drugą, a przeto ieżeli nie odkryie nam sposobu równania linii zawikleyszych s prościeyszemi. Zagłębmy się we wszystkie te uwagi, maiąc na pamięci te wszystkie początki, któreśmy o ostatnich granicach wzrostu lub ubywania ilości odmiennych na początku tego rozdziału wyłożyli.

Wiémy że ilości odmienne maią (*o*) za granicę ciągłego ubywania: niech będzie zrównanie $W=o$ naybogólnieysze między dwiema ilościami odmiennemi x, y, iakiegokolwiek stopnia; $y=o$ daie nam zawsze przecięcia linii krzywey od osi; zaś $x=o$ przecięcia teyże linii krzywey od przystawy wychodzącey s początku odcinków: ieżeli więc w liniach krzywych znayduią się takie właśności przywiązane do dwóch granic, te wypaśdź nam koniecznie muszą s teraźnieyszey teoryi: a iako $x=\infty$, $y=\infty$ granicach

cach wzroſtu dały nám ſtóſunek $\frac{y}{x}$ ſkończony; tak i teráz $x=o$, $y=o$, dadzą nám także ſtóſunek $\frac{y}{x}$ ſkończony, wyrážaiący tę włáſność od granic zawiſłą. Albowiem podług §. 16. Algebry wyráz $\frac{o}{o}$ pokazuie wártość ſkończoną. Ieżeli więc na fig. 30 odcinkowi $AP=x$ odpowiadá przyſtawa $PM=y$ taka, iaką wyrážá zrównanié $W=o$, nazwáwſzy té wártości punktowi M odpowiadaiącé $x=p$, $y=q$; p, q uczynić powinny zadoſyć zrównaniu (§. 5. Algeb.) a przeto włożywſzy p za x, q za y, wſzyſtkié terminy zniſzczyć. Poprowadziwſzy teráz przez M równo-ległą osi MS, i nazwáwſzy $MS=t$, $SN=u$, $x=p+t$, $y=q+u$, i té wártości włożywſzy w zrównanié $W=o$, oś zaś AP przenióſzy na MO, początek odcinków na M; ponieważ p, q, były piérwiáſtkami do punktu M, i tam całé zrównanié przywiodły do zero, tén zaś punkt M ieſt teráz początkiém odcinków na osi MO, więc u niego wſpół-uſzykowané p, q, znikną, i niezoſtaną ſię w zrównaniu $W=o$, tylko terminy będącé funkcyą t, u; to ieſt, zrównanié $W=o$ kładąc $x=p+t$, $y=q+u$ ſtanie ſię: Fig. 30.

$$o=At+Bu+Ct^2+Dtu+Eu^2+Gt^3+Ht^2u+Itu^2+Ku^3+Lt^4$$
$$+ \text{ i t. d.} =o \quad - \quad - \quad - \quad - \quad (\lambda).$$

gdzie A, B, C, D, i t. d. ſą ilościami ſtatecznémi: to zaś zrównanié wyrážá tę ſamę linią krzywą, którą wyrážało $W=o$, ale wſpół-uſzykowané któré przedtém należały do osi AQ, teráz należą do MS, i p, q, ſą teráz nieodmienné. Im punkt N zbliżá ſię barziéy do punktu M, tém t czyli MS, co ráz barziéy maleie, tém punkt N linii krzywéy, zbliżá ſię barziéy do punktu L linii proſtéy; a przeto łuk MN do linii ML: liniá więc proſtá ML ieſt granicą łuku MN, do któréy ſię tén łuk coráz barziéy zbliżá, ale któréy nigdy nie może doſiąc, nie odmieniwſzy ſwéy natury. Odnioſłſzy w zrównaniu (λ) ilości ubywaiącé t, u,

do ſwych oſtatnich granic, wſzyſtkie potęgi wyżſzé znikną przed nayniżſzą, i zoſtanie ſię $At+Bu=o$; aże wſpół-uſzykowané MS, NS, doſiągłſzy oſtatnich granic ſwégo ubywaniá łuk MN zamiéniá ſię na ſtyczną ML, przeto $At+Bu=o$ ieſt zrównaniem na ſtyczną ML. Każdá więc ſtyczná ieſt granicą łuku niknącégo; má bowiem dwa punkta ſpólné z linią krzywą: zmniéyſzaiąc co ráz barziéy łuk linii krzywéy, zbliżámy ſię do tych punktów tuż przyległych, ale tych dwóch punktów nie możémy doſiąc, chyba że liniá krzywá całą naturę odmiéni. Dwa bowiém punkta tuż przyległé, czyli mowiąc ięzykiém geometrycznym, dwa punkta nieſkończenie bliſkié nie czynią linii krzywéy; bo wiémy z Rozd. I. że tylko ſama liniá proſtá oznaczá ſię dwiéma punktami, ale liniá krzywá náyproſciéyſzá potrzebuie ich więcéy. Ieżeli do poznaniá natury linii krzywéy ſzukámy tylko iednégo punktu, i tén wyraziwſzy zrównaniém, czyli iak ſię tłómaczyli dawni Geometrowie znalazłſzy *mieyſce geometryczné* tego punktu, mámy zrównanié na linią krzywą, przeſtaiémy na iednym punkcie dlá tégo, że wſzyſtkié inné punkta uważámy takiém prawém opiſané do iakiegośmy przyſzli w zrównaniu, i że tén punkt przez funkcyą ilości odmiennych, wyraziwſzy, to ſamo prawo odmiany rościągámy do wſzyſtkich innych punktów. Powtóré do oznaczeniá linii krzywéy potrzeba nám koniecznie wiedziéć prawo, podług którégo odmiéniá ſię punkt tę linią krzywą opiſuiąc; ieżeli mámy zadanié i kondycye iakié do niego przywiązané, i ieżeli té kondycye ſą wyſtárczaiącé, zamykaią w ſobie ukryté prawo ciągłości, któré my tylko tłómaczémy na znaki ſzukaiąc zrównaniá, a przeto doſyć nám ieſt takowé prawo znané s kondycyi pytaniá do iednégo punktu przywiązać, aby całą linią poznać. Ale wyſtáwmy ſobie że mámy łuk iakiey linii krzywéy z nikąd niéznanéy, a chcąc doyśdź prawa podług którégo taká liniá ieſt opiſaná, muſielibyśmy

prowadzić

prowadzić współ-uszykowané przez wielką liczbę punktów, a znacząc ich odmiany, trzebaby nám w tych odmianach iakiegoś upatrywać prawa i związku, a tén dostrzegłszy, dopiérobyśmy przyszli do poznaniá linii podanéy. W takim przypadku postawiwszy się myślą, nigdyby nám dwa, ani trzy, ani nawet cztéry punkta tuż przyległe nie wystarczyły do poznaniá linii krzywéy, co nie tylko należałoby przypisać słabości naszego umysłu, ale nawet naturze rzeczy. Idąc bowiem od punktu linii krzywéy do tuż przyległégo, różnica dwóch położéń iest tak małá, że iéy z żádną skończoną ilością porównać niepodobná, i póty nié może bydź dostrzeżoná, póki skończonéy iakiéy nie doydzie miary; to iest póki pewnego łuku linii krzywey nie przeydziémy; łuku zaś takiégo, który istotnie do tey a nie inszéy linii náleży. Na łuk zaś taki trzeba nám pięć punktów w linii *2go* porządku, *9* w linii *3go* i t.d. podług §. VI. Ieżeli więc dwa punkta tuż przyległé nie czynią nigdy linii krzywéy, poznámy łatwo że uważać linią krzywą iako złożoną z linii prostych nieskończenie małych, prowadzonych do każdych dwóch punktów przyległych, nie iest to uważać ią geometrycznie, bo taká uwága iest przeciwná piérwszym początkom Geometryi. Możémy iéy użyć kiedy idzie o iaki wymiár n.p. płászczyzny linią krzywą zamkniętéy, lub o iaki praktyczny rachunek, nie mogąc tego rachunku drogą ścisłości geometrycznéy dostąpić, iak przymuszeni iesteśmy czynić prawie we wszystkich zadaniach fizyki, stósuiąc Geometryą do skutków Przyrodzeniá: ale to iest tylko droga zbliżaniá podobná do téy, iakąśmy szli w szeregach nieskończonych. Nigdy zaś nie możná tych przypuszczéń używać do dowodu iakiéy prawdy ogólnéy, boby té naprzód przy czystém rozumowaniu nigdy nás do prawdy ścisłéy nie przywiodły, a przy nieostrożności staią się źrzodłem przeciwnych wypádków, lub fałszywego dowodu. S tych uwág których dotąd nie starano się w swém świetle

wystawić,

wyſtawić, rozſądzémy łatwo tylé błędnych dowodów, rossianych między náyściśléyſze Geometryi prawdy od wielu Autorów.

Spoſób wynay dowaniá podſtycznych w liniach krzywych.

Dwa punkta tuż przyległé w linii krzywéy oznáczaią położenié ſtyczney, która przeciągnioná pokazuie na tym miéyſcu kierowność punktu opiſuiącégo linią krzywą: gdyby ta kierowność zoſtała nieodmienną, punkt opiſałby linią proſtą: ale że ta kierowność odmiéniá ſię idąc od każdégo punktu do tuż przyległégo, powſtaie stąd liniá krzywá, którą możná uważać opiſaną od punktu odmieniaiącégo w każdém miéyſcu ſwoię kierowność, tę zaś kierowność pokazuie ſtyczná u każdych dwóch punktów przyległych linii krzywéy. Przenióſſzy oś linii krzywéy i początek odcinków do tego ſamégo punktu dotykaniá ſię, a odnióſſzy ilości odmienné do ſwych granic ubywaniá, zrównanié na ſtyczną ieſt $At+Bu=o$, skąd

Fig. 10. $\frac{u}{t}=\frac{-A}{B}$; s podobiéńſtwa tróykątów LSM, MPT mámy $LS:MS=MP:PT=-A:B$, przeto $PT=\frac{-Bq}{A}$ zrównanié ogólné na wynalezienié PT, którą nazwano Podstyczną (*Subtangens*), a przeto na prowadzenié ſtyczney do iakiéykolwiek linii krzywéy: ſpoſób ten ogólny prowadzeniá ſtycznych zamyká ſię w naſtępuiącém prawidle.

„Maiąc zrównanié podané na linią krzywą, połóż „naprzód q za y, p za x; skąd powſtanie związek „na p, q, czyniący zadoſyć zrównaniu w punkcie M: „powtóre w toż zrównanié podané połóż powtór„nie $x=p+t$, $y=q+u$; wymáż náprzód té terminy, „któré wypádły na zadoſyć uczynienié w piérwſzém „przerábianiu zrównaniá, potém opuść wſzyſtkié „potęgi wyżſzé t, u, i zoſtanie ſię $At+Bu=o$, skąd „$\frac{-Bq}{A}$ daie podſtyczną, a przeto położénié ſtycznéy „do punktu danégo„

Przykład

Przykład na Parabolę: Zrównanie na linią krzywą $y^2=2ax$ kładąc naprzód p za x, q za y, zamienia się na $q^2=2ap$; powtóre kładąc $x=p+t$, $y=q+u$; zamienia się na $q^2+2qu+u^2=2ap+2at$, aże $q^2=2ap$, opuszczam te terminy w ostatniem zrównaniu, potem u^2; i zostaie mi się $at-qu=o$. skąd $\frac{u}{t}=\frac{a}{q}=\frac{-A}{B}$, $PT=\frac{-Bq}{A}=\frac{q^2}{a}$, aże $a=\frac{q^2}{2p}$, więc $PT=2p$: podstyczna więc iest dwarazy większa od odcinku.

Przykład na Hyperbolę: Niech będzie zrównanie na linią krzywą $y^2=\frac{k^2}{g^2}(x^2-g^2)$, czyli $y^2g^2=k^2x^2-k^2g^2$, kładąc p za x, q za y; zamienia się na $q^2g^2=k^2p^2-k^2g^2$ - - - (α); kładąc powtóre $x=p+t$, $y=q+u$, zamienia się na $g^2q^2+2g^2qu+g^2u^2=k^2p^2+2k^2pt+k^2t^2-k^2g^2$; wymazawszy naprzód terminy zamknięte w zrównaniu (α), powtóre potęgi wyższe t, u, zostanie się $k^2pt-g^2qu=o$; przeto $A=k^2p$, $B=-g^2q$; $PT=\frac{-Bq}{A}=\frac{g^2q^2}{k^2p}$, aże z zrównania ($\alpha$) mam $k^2=\frac{q^2g^2}{p^2-g^2}$, więc $PT=\frac{p^2-g^2}{p}$, co się właśnie zgadza z wypadkami Rozdziału 2go. Tym sposobem na wszystkie linie krzywe, których zrównania przywieść się mogą do wyrazu całkowitego zniszczywszy ułomki; i do wyrazu wymiernego zgubiwszy znaki pierwiastkowe; mamy sposób ogólny prowadzenia stycznych. Lubo zaś teraźnieyszy sposob stósowaliśmy do współuszykowanych pionowych, ma on iednak to samo użycie i w ukośnych, które możemy łatwo za pomocą trygonometryi przerobić.

§. XXII.

Znaleźliśmy dopiero podstyczną $PT=\frac{-Bq}{A}$, A, B,

będąc

Sposób rozeznáwaniá punktów dwoistych, i troistych w liniach krzywych

Fig. 30.

będąc współ-czynnikami zrównania $At+Bu=o$; gdyby w tym wyrazie podstyczney było $A=o$, PT wypádá nieskończoná, i na ten czas kąt PTM zniknąwszy, styczná staie się równo-ległą osi TQ: gdyby zaś było $B=o$, PT staie się także $=o$; co nás uczy, że punkt T przypádá w samym początku odcinków, skąd wychodzącá przystawa iest styczną linii krzywey. S tych dwóch uwág wypádá nauka barzo wielkiey wági w Matematyce wyższey o przystawách NAYWIĘKSZYCH i NAYMNIEYSZYCH (*De maximis & minimis*). Zaiste weźmy sobie za przykład Ellipsę lub koło, w nich kiedy styczná staie się równo-ległą osi, pokazuie mieysce przystawy náywiększey, po którey idące inne zmnieyszaią się, a przeto pokazuie razem náywiększe wzniesienie się linii krzywey nad oś: kiedy zaś styczná stanie się równo-ległą przystawóm, pokazuie odwrot linii krzywey i przystawę náymnieyszą. Te zaś poznáwániá zwrotu lub wyniosłości linii krzywych są wielkiego barzo użyciá do poznania ich rysunku w odległości skończoney. Szukaiąc przez sposób §. poprzedzaiącego podstyczney na Ellipsę, którey zrównanie $y^2g^2+k^2x^2=k^2g^2$, kładąc náprzód p za x, q za y; wypadá - - - $g^2q^2+k^2p^2=k^2g^2$ - - (β). powtóre kładąc $x=p+t$, $y=q+u$, znáydziemy na $At+Bt=o$, $g^2qu+k^2pt=o$. gdzie $A=k^2p$, $B=g^2q$. Podstyczná $PT=\frac{-Bq}{A}=\frac{-g^2q^2}{k^2p}$, kiedy w Ellipsie styczná iest równo-ległą osi $PT=\frac{1}{0}$, bo $A=o$, czyli $k^2p=o$. gdzie k nie mogąc bydź zero, wypádá $p=o$: wprowadziwszy w zrównanie (β) kondycyą $p=o$; wypáda $q=\pm k$, to iest że przystawa náywiększá iest równá pół-osi mnieyszey. Kiedy zaś w Ellipsie styczna staie się równo-ległą przystawom, na ten czás $B=o$, czyli $g^2q=o$, gdzie znowu nie może bydź tylko $q=o$: wprowadziwszy

wſzy tę kondycyą w zrównanie, otrzymamy $p=\pm g$; to ieſt że odcinek náywiękſzy, ieſt równy pół-osi więkſzéy, a iako na każdą s tych náywiękſzych ilości dwié wypadły wártości, przeto dwié ſą przyſtawy náywiękſzé w Ellipſie pokazuiącé dwa podnieſieniá ſię linii krzywéy iedno nad, drugié pod osią; powtóré dwa odwroty téyże linii krzywéy na obydwoch końcach osi więkſzéy. W tych zaś przypádkach widzémy, że w Ellipſie takiém zrównaniém opiſanéy odcinkowi náymniéyſzému odpowiadá przyſtawa náywiękſzá, a przyſtawie náymniéyſzéy odcinek náywiękſzy. Ponieważ więc w téy teoryi wypádaią razém rzeczy náymniéyſzé i náywiękſzé, chcąc ią do zupełnéy ogólności i doſkonałości przywieśdź, potrzebaby wynaleśdź prawidło na rozeznanié w każdym przypádku kiedy i co wypádá náymniéyſzé, a kiedy i co náywiękſzé. Bo ieſzcze náleży nám oſtrzéc, że nie zawſze wypádá przyſtawa linii krzywéy náywiękſzá, kiedy ſtyczná ieſt równo-ległą osi; i nie zawſze náymniéyſzá, kiedy ieſt równo-ległą przyſtawom: ale w piérwſzym przypádku bydź może náymniéyſzą, w drugim náywiękſzą. Wyſtáwmy ſobie że liniá krzywá má taki ryſunek iaki nám pokazuie fig. 31. w punkcie A przyſtawa będzie náymniéyſzá, chociaż tam ſtyczná LM ieſt równo-ległą osi; a w punkcie O może bydź náywiękſzą, albo ani naywiękſzą ani náymniéyſzą, chociaż ſtyczná ieſt równo-ległą przyſtawie PA. Té wſzyſtkié przypádki potrzebuią náyogólniéyſzych prawideł na rozeznanie iednych od drugich: i czynią tę teoryą iednę z náyobſzerniéyſzych w rachunku Diſferencyalnym, do którégo ią odkładámy. Będzie nám miło w obſzerném tam wyłożeniu téy nowéy teoryi, i iéy użyciu dadź poznać wyſokié wynálázki Wielkich wieku naſzégo Geometrów Mac-laurin, de la Grange, Eulera. Wróćmy ſię do piérwſzych uwág nad ſtycznémi. Fig. 31.

Widzieliśmy iuż wypádaiącé wártości ſtycznych,

czyniąc w zrównaniu $PT=\frac{-Bq}{A}$, $A=o$ famo, potém B famo $=o$. uczyńmy teraz razém $A=o$, $B=o$; zrównanié na podftyczną ftaie $\frac{o}{o}$, i zrównanié na ftyczną $\frac{u}{t}=\frac{-A}{B}=\frac{o}{o}$. Wyráz tén $\frac{o}{o}$ podług §. 16. Algebry ieft wyrazem nieoznaczonym oftrzegaiącym nás, że po wynalezieniu ftycznych wrócić nam fię potrzeba do pierwfzégo zrównaniá (λ) §. 21: tam uczyniwfzy $A=o$, $B=o$, dwa terminy náyniżfzégo wymiaru nie będą fię znaydować w zrównaniu, alé na ich miéyfcé $Ct^2+Dtu+Eu^2$ fą terminami wymiáru náyniżfzégo, przed którémi inné potęgi nikną, a któré przeto dadź nám powinny wártość ftyczney. Zrównanié więc na ftyczną ieft $Ct^2+Dtu+Eu^2=o$ · · (γ). to zrównanié rozebrać fię może na dwa pierwfzego ftopnia rzetelné lub uroioné, równé lub nierówné. Ieżeli $D^2>4CE$, dwa pierwiaftki zrównaniá (γ) fą rzetelné nierówné, każdy z nich wyráżá ftyczną do
Fig. 30. punktu M; więc do punktu M należą dwie ftyczné ofobné i różné, a przeto mufzą bydź dwa łuki linii krzywéy przecinaiącé fię w punkcie M, iakié nám
Fig. 32. No. 1mo maluie fig. 32. N°. 1°. VM, NM, do których prowadzoné ftyczné LM, HM, pokazuią kierowność każdégo łuku w punkcie M, który ieft punktém dwoiftym.

Ieżeli $D^2=4CE$ zrównanié (γ) zamyká dwa pierwiáftki równé rzetelné, co nás uczy, że obydwie ftyczné LM, HM, zefzły fię razem, i odnogi dwie linii krzywéy w punkcie M wzięły iednę kierowność, czyli té odnogi dotykaią fię s fobą w punkcie M.

Ieżeli zaś $D^2<4CE$ dwa pierwiáftki zrównaniá (γ) fą uroioné, co nás uczy że M znaczy odnogę iaykowatą zamienioną w punkt dwoifty fprzężony §. 2. Każdá więc liniá krzywá w którey zrównanié (γ) má miéyfcé, zamyká punkt dwoifty, w którym albo fię dwie odnogi przecinaią i czynią węzeł; albo

fię

ſię dotykaią: albo nakoniec tén punkt dwoiſty ieſt punktém ſprzężonym: podług troiakiégo gatunku piérwiáſtków (γ).

Gdyby ieſzcze w zrównaniu (γ) nie tylko *A*, *B*, ale *C*, *D*, *E*, były $=o$, na tén czás terminy $Ft^3+Gt^2u+Htu^2+Iu^3$ byłyby wymiarém náyniżſzym przed którym wſzyſtkié inné wyżſzé zniknąwſzy, mielibyśmy $Ft^3+Gt^2u+Htu^2+Iu^3=o$ - - - (δ) to zrównanié mogąc ſię rozebrać na trzy piérwſzégo ſtopnia, odkryie nám punkt troiſty w *M*; to ieſt albo taki, przez który przechodzić będzie iedna odnoga linii krzywéy, i gdzie razém drugá zamiéniła ſię w punkt ſprzężony, ieżeli zrównanié (δ) má iedén piérwiáſtek rzetelny a dwa uroioné; albo punkt taki, w którym ſię trzy odnogi linii krzywéy przecinaią, ieżeli trzy piérwiáſtki ſą rzetelné nieró wné; albo punkt w którym ſię trzy odnogi dotykaią, ieżeli piérwiáſtki rzetelné ſą wſzyſtkié równé: albo na koniec punkt, w którym ſię dwie odnogi dotykaią, a trzeciá ie przeciná, ieżeli dwa piérwiáſtki rzetelné ſą równé, a trzeci nierówny. Zawſze zaś liniá proſtá przechodząc przez punkt *M* troiſty przeciná linią krzywą w trzech miéyſcach, tak iak przecinaiąc ią w punkcie dwoiſtym uważana bydź ma iak gdyby w dwóch miéyſcach tęż linią krzywą przecięłá. Idąc daléy za tém rozumowaniém, możémy ſobie ieſzcze wyſtawić, że wſzyſtkié terminy zrównaniá (δ) ſą zero, a na tén czás przypadnié nám wziąść na ſtyczną z zrównaniá (λ) terminy ſkładaiącé czwárty wymiár: takowé czwártégo ſtopnia zrównanie roſtrząſaiąc, znáydziémy mu punkt odpowiadaiący poczwórny, powſtaiący albo z dwóch punktów ſprzężonych, albo czterech odnóg ſię przecinaiących lub dotykaiących, albo s czterech odnóg s których dwie ſię dotykaią, a dwie inné ié przecinaią w tymże ſamym punkcie. Przeciąwſzy linią krzywą w takowym poczwórnym punkcie, uważać w tém przecięciu należy, że liniá

H2 proſtá

proſtá w czterech punktach przecięła krzywą. Stąd łatwo nám barzo ułożyć zrównaniá ogólne na linie krzywe maiące punkta poiedyncze, dwoiſte, poczworne, i t. d. Zaiſte żeby zrównanie wyrázało linią krzywą maiącą punkt poiedynczy, potrzeba naprzód, żeby to mogło bydź przywiedzione do zero, położywſzy p za x, q za y: powtóre żeby kładąc za x, $p+t$, za y, $q+u$; odmieniło ſię na zrównanie między t, u, takie, któreby w oſtatnich granicach ilości ubywaiących zamienić ſię mogło na $At+Bu=o$, a przeto wyraziwſzy takie zrównanie przez $P(x-p)+Q(y-q)=o$, P i Q bydz powinny funkcyami x, y, i całe zrównanie nie powinno bydź rozdzielne przez $x-p$, ani przez $y-q$; potrzeba bowiem zawſze aby to zrównanie przerobione na t, u, wzięło wzór zrównaniá (λ). Podobnie zrównanie na linią krzywą maiącą punkt dwoiſty wyrazić możemy przez $P(x-p)^2+Q(x-p)(y-q)+R(y-q)^2=o$, w którem P, Q, R, bydź powinny koniecznie funkcyami x, y, całe zaś zrównanie nie powinno bydź rozdzielne ani przez $x-p$, ani przez $y-q$. Skąd łatwo poznaiemy że linie 2go porządku nie mogą mieć punktu dwoiſtego, w nich bowiem P, Q, R, muſiałyby bydź funkcyami ſtatecznemi; a przeto zrównanie podane nie na linią krzywą, ale byłoby na dwie linie proſte. Ieżeli ieſzcze linią krzywą maiącą punkt troiſty opiſzemy zrównaniem - - - $P(x-p)^3+Q(x-p)^2(y-q)+R(x-p)(y-q)^2+S(y-q)^3=o$; P, Q, R, S, bydź powinny funkcyami ilości odmiennych; powtóre całe zrównanie nie powinno bydź rozdzielne przez $x-p$, ani przez $y-q$; dla czego linie 3go porządku nie mogą mieć punktu troiſtego; ale iako porządek trzeci ieſt nayniżſzy, który mieć może punkt podwóyny; tak porządek czwárty nayniżſzy, który mieć może albo ieden punkt troiſty albo dwa dwoiſte. Co nám łatwo ieſt rościągnąć do linii krzywych porządków wyżſzych, to ieſt: że linia porządku n nie może mieć punktów mnogości większey od $n-1$.

§. XXIII.

Uważaiąc odnogi nieskończone w liniach krzywych przez granice ilości wzrastaiących doświadczyliśmy, iż zrównanie podané zniszczywszy w niém wszystkie terminy niższych wymiarów, procz dwóch piérwszych dały nám ledwo-niestyczną prostą: ocaliwszy zaś w niém większą liczbę terminów, wypadła ledwo-niestyczná krzywá mięszaiącá się w odległości nieskończonéy z linią podaną. Te zaś ledwo-niestyczné krzywé daleko nám lepiéy wydawały własności linii podanéy iak ledwo-niestyczne prosté. Podobnie w teraźniéyszych dociekaniach ocaliwszy więcéy terminów w zrównaniu

Równaią się linie krzywé z kołem.

$o = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + Iu^3 + Kt^4$ + i t. d. - - - (λ).

zrównanie pozostałé wyrazi nám linią krzywą, któréy większá liczba punktów przystanie do linii podanéy. Kiedy bowiem linii iakiéy krzywéy odnoga dotknie się odnogi innéy linii krzywéy, dwa małe łuczki tych linii zmięszaią się tak, iż ich krzywizna a przeto kierowność punktu opisuiącégo takie łuczki, stanie się ta sama; podzieliwszy przeto linią krzywą podaną na takie łuczki tuż sobie przyległe, uważać ią możémy iako złożoną z elementów drugiéy linii krzywéy odmieniaiącéy swoie położenie na każdy takowy łuczek, to iest odmieniaiącéy ilość stateczną, którąśmy linią porównania nazwali w §. 7. Aże z odmiany takowéy statecznéy ilości rodzą się linie krzywe podobne, przeto każdą linią iakiegokolwiek bądź porządku równaiąc ią sposobém opisanym z inną linią krzywą, uważać możemy iako złożoną z łuczków podobnych téy ostatniéy. Do takowégo równaniá obrać nám náprzód należy linią krzywą, w któréy zrównanie nie wchodzi tylko iedná ilość stateczná, powtóré któréy własności są nám znane naylepiéy, i któréy nakoniec odrysowanie iest łatwé. Wszystkie té korzyści zawiera koło, s którém równaiąc inne linie krzywé, uważać ié możemy iako

złożone z łuczków kół podobnych, czyli kół odmieniaiących zawſze ſwoie promienie. A ponieważ wiemy z Geometryi początkowey, że obwód czyli KRZYWIZNA KOŁA (*Curvatura*), ieſt w ſtóſunku ſpacznym promieniá, znalazłſzy na każdy łuczek linii podaney odpowiadaiący promień koła, będziem wiedzieli krzywiznę linii podaney w każdém mieyſcu. I tén to wynalazek promienia odmiennégo zawiera w ſobie całé rozwiązanie niniéyſzégo zadania. Koło takowe którégo łuki odmiennych promieni przyſtaią do łuków linii podaney nazywa ſię (*Circulus oſculator*) KOŁEM ŚCISKAIĄCEM, a promień iego odmiénny má imie PROMIENIA ŚCISKANIA, albo PROMIEN KOŁA PRZYSTAIĄCEGO (*Radius oſculi*; *Radius Curvedinis*). Przenieśmy te uwagi do zrównaniá (λ) i do ſaméy teoryi granic. Kiedyśmy zmniéyſzali na
Fig. 30. fig. 30. łuk *MN* aż do oſtatniégo zniſzczeniá i zamienieniá go na ſtyczną, wſpół-uſzykowané *t*, *u*, takowemu zmniéyſzaniu odpowiadaiącé powinny były przywieśdź zrównanie (λ) do zrównania na ſtyczną *ML*, czyli wſzyſtkie terminy powinny były zniknąć przed *At*+*Bu*: kiedy zaś łuk *MN* zmniéyſzać będziemy nie aż do zamienieniá go na linią proſtą, ale na łuczek innéy linii krzywéy, granice ubywaniá ſtaią ſię mniéy odległé, bo ſię u nich więcéy punktów zoſtaie z linii podanéy; zoſtanie ſię bowiem cały element, czyli łuczek mały téy linii; a przeto w tych granicach zoſtać ſię także powinno więcéy terminów z zrównaniá (λ), i ieżeli potęgi náywyżſzé znikną, tuż naſtępuiącá potęga po piérwſzéy powinna ocaleć; tu bowiem liniá krzywá zamieni ſię w małym łuczku na inną linią, ale nie przeſtanie bydź krzywą; przeto zrównanie (λ) powinno ſię także odmienić na inné zrównanie, ale nie powinno przeſtać wyrażać linii krzywéy. S czego przekonać ſię muſzemy, że zrównanié (λ) odnoſząc do tych bliżſzych granic ilości odmiennéy powinno nám zoſtawić dwie náy-

náybliższé siebie potęgi tychże ilości, to iest: $At+Bu+Ct^2+Dtu+Eu^2=o$, albo $Ct^2+Dtu+Eu^2+Ft^3+Gt^2u+Htu^2+Iu^3=o$, gdyby pierwsza potęga nie znaydowała się w zrównaniu. i t. d.

Chcąc zaś tym sposobém iednę linią krzywą zamieniać na łuki innéy linii krzywéy n. p. koła; musizémy oś przenosić na linią spólną obydwóm krzywym. Miéysce to wspoł-uszykowanych nayprzyzwoiciéy służy promieniowi koła, s którem linią podaną zakładamy sobie równać: promień koła, wiemy że iest zawsze pionowy na iego styczną: a ieżeli łuk koła zmięsza się z łukiém linii krzywéy podanéy, liniá podaná będzie miała s kołem spólną styczną, a przeto na tén czás pionowá do styczney będzie razem promieniém koła mięszaiącégo się w małym łuczku z linią podaną. Náypierwszą więc iest rzeczą oznaczyć położenie linii MQ pionowéy na styczną TL, do każdéy linii krzywéy. Maiąc zaś na linią MQ ieden punkt zawsze dany M, całe iéy oznaczenie zawisło od wynalezienia drugiégo punktu Q, w którym oś przecina, czyli od znalezienia odległości PQ, którą nazwano Pod-pionową (*Subnormalis*). Potrzeba więc wártość na PQ wyciągnąć z zrównaniá (λ), co iest barzo łatwo za pomocą styczneý ML, na którą zrównanie $At+Bu=o$; tróykąty bowiem TMP, PMQ, MSL, będąc podobne prowadzą nás do następuiącéy proporcyi: Fig. 30.

$$MS:SL::MP:PQ, \text{ aże } MS:SL=\frac{t}{u}=\frac{-B}{A}; \; MP=q;$$

$$\text{więc } -B:A=q:PQ \text{ - - } PQ=\frac{-Aq}{B}.$$

Przykład na Parabolę. Wynaleśdź podpionową na linią krzywą opisaną zrównaniém $y^2=2ax$; kładąc q za y, p za x, mámy $q^2=2ap$: kładąc powtóre $y=q+u$, $x=p+t$, mámy zrównanie $q^2+2qu+u^2=2ap+2at$, skąd $qu+at=At+Bu=o$, a przeto $PQ=-a$, to iest pod-pionowa iest linią nieodmienną w Parabo-

li i równą połowie linii równaniá, cośmy iuż znaleźli w §. XIV.

Maiąc w każdéy linii krzywéy PQ; mámy razém $MQ=\sqrt{(MP^2+PQ^2)}$, aże $TM=\sqrt{(PT^2+PM^2)}$ - - $PT:TM=PM:MQ$ - - $MQ=\frac{PM}{PT}\sqrt{(TP^2+PM^2)}$.

Przenieśmy wſpół-uſzykowane $MS=t$, $SN=u$, na linią pionową MQ, i nazwiymy $MR=z$, $RN=w$: zrównanie $At+Bu=o$ odkryło nám ſtyczną kąta $LMS=\frac{u}{t}=\frac{-A}{B}$, iego więc wſtawa $=\frac{-A}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, Doſtawa $=\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$; od R ſpuściwſzy pionową RO na nową oś, i RH równo-ległą MS, mámy $MC=\frac{-Az}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, $RO=\frac{Bz}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, $NH=\frac{-Aw}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, $RH=\frac{Bw}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$; a przeto $t=MO+RH=\frac{-Az+Bw}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, $u=\frac{-Aw-Bz}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, skąd otrzymámy za pomocą elimi-nacyi $z=\frac{-At-Bu}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$; $w=\frac{Bt-Au}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$; aże zrównanie ($\lambda$) daie nám

$-At-Bu=Ct^2+Dtu+Eu^2+Ft^3+Gt^2u+Htu^2+Iu^3+$i t.d.

widzemy że z ieſt iłością daleko mnieyſzą od w; albowiem w ieſt wyrażoné przez t, u; z zaś przez potęgi wyżſze tychże odmiennych iłości: potrzeba nám więc pamiętać o tych wártościach z, w, odnoſząc ich ubywaniá do oſtatnich granic.

Użyimy teraz wſzyſtkich uwág wyłożonych na początku tego §. s których náprzód wypádá; że uważaiąc linią krzywą podaną zamkniętą w zrównaniu (λ), iako maiącą za granicę łuk innéy linii krzywéy, wſzyſtkie potęgi znikną w (λ) przed pierwſzą i drugą, zoſtawiwſzy

$-At$

$$-At-Bu=Ct^2+Dtu+Eu^2 \quad - \quad - \quad (\Lambda)$$

poznámy naſámprzód naturę te'y linii, a dopie'ro równać ią będzie'my s kołe'm, abyśmy wſzyſtkie' linie krzywe' przywiedli do łuków koła. Przeto odmienić nám potrzeba wſpół-uſzykowane' zrównaniá (Λ) kładąc $t=\frac{-Az+Bw}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, $u=\frac{-Aw-Bz}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, przez co zrównanie' ($\Lambda$) zamie'ni ſię na

$$z\sqrt{(A^2+B^2)}=\frac{(A^2C+DAB+EB^2)}{A^2+B^2}z^2+$$

$$\frac{(A^2D-B^2D-2ABC+2ABE)}{A^2+B^2}wz+$$

$$\frac{(CB^2-ABD+A^2E)}{A^2+B^2}w^2$$

widzieliśmy zaś, że z ieſt niezmie'rnie małe'm w porównaniu w, więc w granicy, z^2, zw, znikną przy z, w^2; a zrównanie' pozoſtałe' będzie wyrażać Parabolę

$$w^2=\frac{(A^2+B^2)\sqrt{(A^2+B^2)}z}{[CB^2-ABD+A^2E]} \quad - \quad - \quad (L).$$

Liniá więc podaná zmięſzá ſię w małym łuczku s Parabolą, które'y miarą równaniá ieſt wſpół-czynnik z w zrównaniu (L). Przeſtaiąc na tym oſtatnim wynalazku, moglibyśmy wſzyſtkie' linie krzywe' uważać iako złożone' z łuków Parabolicznych. Ale łubo Parabola ieſt linią náyproście'yſzą 2go porządku co do zrównaniá, nie ieſt iednak taką co do ryſunku. Znalázłſzy związek między linią równaniá w Paraboli, i między promienie'm koła, dalekobyśmy ſzczęśliwie'y równać mogli łuki iakichkolwiek linii krzywych s kołe'm, bobyśmy za iego pomocą przyſzli do odryſowaniá łatwo iakie'ykolwiek linii. Całá zaś ta ſztuka zależy od poznaniá promie'nia koła odpowiadaiącego każde'mu łukowi linii podane'y. Weźmy więc zrównanie' na koło, którego promień $=a$, to ieſt

H5 $y^2=$

$y^2=2ax-x^2$, kładąc w nie naprzód p za x, q za y; otrzymamy $q^2=2ap-p^2$; powtóre kładąc $x=p+t$, $y=q+u$; wypadnie $q^2+2qu+u^2=2ap+2at-p^2-2pt-t^2$; aże $q^2-2ap+p^2=0$ - - zostaie się

$$2qu+u^2-2at+2pt+t^2=0.$$

znosząc współ-czynniki tego zrównania z (Λ), znaydziemy $A=2p-2a$, $B=2q$, $C=1$, $D=0$, $E=1$, $A^2+B^2=4(p^2-2pa+a^2+q^2)=4a^2$, gdyż $q^2-2pa+p^2=0$; $\sqrt{(A^2+B^2)}=2a$, $(A^2+B^2)\sqrt{(A^2+B^2)}=8a^3$; $CB^2-ABD+A^2E=4(p^2+q^2-2pa+a^2)=4a^2$, a zrównanie ($L$) zamieni się na - - $w^2=2az$, które nás uczy, że linia rownania w Paraboli mieszaiącey się z linią krzywą podaną przy M, iest tey samey wielkości, ktorey śrzednica koła mieszaiącego się z tąż linią krzywą, czyli

Promień koła przystaiącego do linii krzywey.

$$2a=\frac{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}{(CB^2-ABD+A^2E)},\ a=\frac{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}{2(CB^2-ABD+A^2E)}\quad (R'')$$

zrównanie (R'') wyraża promień ściskania, czyli promień koła maiącego taką krzywiznę, iaką ma linia podana w łuczku małym przy M. Szukaiąc takiego promienia na każdy łuk linii podaney, znaydziemy w każdem mieyscu inną iego wartość, a przeto linią iakiegokolwiek porządku iako złożoną z łuków kół różnych. Promień ten odmieniać będzie swoie położenie tak, iż raz przypaśdź może wewnątrz, a drugi raz zewnątrz linii krzywey, to iest z drugiey strony punktu M n. p. MV: w pierwszym przypadku linia krzywa będzie wklęsłą do pionowey MQ; w drugim zaś będzie wypukłą; co nam właśnie wytyka zrównanie (R'') przez znak pierwiastkowy, który w sobie zamyka, i przez który pokazuie dwie wartości na promień ściskania: Iakże każdy s takowych przypadków rozróżnić? Trudność tę obiaśnia nam samo porównanie fig. 32. z fig. 30: kiedy bowiem pionowa MQ padá zewnątrz linii krzywey NM, zawsze $SL<SN$, kiedy zaś $SL>SN$ iak na fig. 30. linia krzywa NM iest wklęsłą do pionowey MQ; w pier-

Fig. 32. No. 2do

Fig. 30.

w pierwſzym razie LN ieſt odiemné; w drugim zaś dodatné, a przeto cała ta trudność ułatwi ſię wynalázłſzy zrównanié warunkowé, na LN dodatné lub odiemné. Nazwiymy $LN=s$, ponieważ $SN=u$, a s poprzédzaiących przypuſzczéń $SL=\frac{-At}{B}$, będzie na fig. 30. $u=\frac{-At}{B}-s$, włożywſzy tę wártość za u w zrównanié ($\wedge$), otrzymámy - - - - Fig. 30.

$$-B^3s+B^2Ct^2-ABDt^2-B^2Dts+A^2Et^2+2ABEts+B^2Es^2=o.$$

s ieſt ilością niezmiérnie małą, która niknie przy zbliżaniu ſię linii krzywéy do łuku koła, przeto opuściwſzy terminy zawiéraiącé s^2, ts, zoſtanie ſię Rozeznanié położeniá linii krzywéy względém ſtyczney.

$$s=\frac{(A^2E-ABD+B^2C)t^2}{B^3} \quad - - - - (P'')$$

ilékolwiek więc wyráz $\frac{A^2E-ABD+B^2C}{B}$, będzie odiemny, odnoga linii krzywéy będzie wypukłą do pionowéy iak na fig. 32. N^o. $2d^o$, będzie zaś odnoga wklęſłą do pionowéy MQ, ilékolwiek wyráz wſpomniony będzie dodatny iak na fig. 30, czego łatwo nám zawſze doświadczyć na iakąkolwiek linią krzywą, maiąc wſpół-czynniki A, B, C, D, E, znané z zrównaniá ($\wedge$). Fig. 32. N^o. $2d^o$. Fig. 30.

Zrównanié (R'') może nám dadź na promień ściſkaniá albo wártość ſkończoną, albo zéro, albo nieſkończenie wielką: każdemu s tych przypádków odpowiadaią pewné odmiany w krzywiznie linii. Ieżeli promień ściſkaniá ieſt zawſze ilością ſkończoną, odnoga linii krzywéy ciągnie ſię bez żádnéy przerwy i zwrotu: ale ieżeli promień ściſkania wypadnie nieſkończony, ponieważ łuk koła na takowy przypádek zamiéniá ſię na linią proſtą, liniá krzywá będzie miała odnogę złożoną z łuczku tak niezmiernie małéy krzywizny, iż tén ledwo do linii proſtéy nie przyſtanie. Wyſzczególniymy dokładniéy tén przypádek,

pádek, który ilekolwiek razy ma mieyfcé, zawfze $CB^2-ABD+A^2E=o$: warunek tén może bez wątpienia niektóre terminy w zrównaniu (Λ), tak dalece, że pozoftała ich reſzta nie nauczy nas o gatunku linii krzywéy w tém mieyſcu przyftaiącéy do linii podanéy: potrzeba więc przybrać więcéy terminów z zrównania (λ), iako to $Ft^3+Gt^2u+Htu^2+Iu^3+$ i t.d. i w nie kładąc $t=\frac{-Az+Bw}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, $u=\frac{-Aw-Bz}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$, odmieniémy zrównanie na inne wzoru

$$z\sqrt{(A^2+B^2)}=aw^2+bw^3+cw^4+dw^5+\text{ i t.d.} \quad - - (Q'')$$

gdzie wyżſze potęgi z ſą odrzucone iako niknące. S tego zrównania $z\sqrt{(A^2+B^2)}=aw^2$ wyraża nam naturę łuku mięſzaiącego ſię z linią podaną, promień zaś ſciſkania do tego łuku ieſt $=\frac{\sqrt{(A^2+B^2)}}{2a}$, położywſzy $a=o$, tén promień ſtanie ſię nieſkończony, czyli łuk mały zmięſza ſię z linią proſtą: w takowym razie chcąc poznać dalſzy ciąg linii krzywéy brać nam potrzeba z (Q'') naſtępuiący termin bw^3 skąd $z\sqrt{(A^2+B^2)}=bw^3$, wyraża krzywiznę łuku naſtępuiącego. Aże z, w, będąc w potęgach nieparzyſtych, na z dodatne wypada w dodatne; w zaś odiemne, kiedy z ieſt odiemném; idzie za tém, że linia krzywa muſi mieć taki ryſunek iaki nam pokazuie fig. 33. gdzie $+MR$ odpowiada $+RS$; a na $-MR'$, $-R'S'$; przy punkcie więc M odwraca ſwoię odnogę i bierze poſtać wężykowatą: kſztałt takowy przy M nazywa ſię PRZEGIĘCIEM (*Inflexio*) albo punktem ZWROTU PRZECIWNEGO (*Punctum flexus contrarii*), gdzie krzywizna ieſt nieſkończenie mała, i prawie przyſtaiąca do linii proſtéy.

Podział linii krzywych na odnogi różnych porządków: i cechy każdéy z oſobna.

Fig. 33.

Ieżeli b byłoby $=o$, na tén czas wziąć należy naſtępuiący termin z (Q''), $z\sqrt{(A^2+B^2)}=cw^4$, w tém zrównaniu ponieważ w tak dodatne iak odiemne czyni zawſze z dodatném, linia krzywa w tym przypadku nie ma punktu zwrotu przeciwnego: ieżeli

$c=o$;

$t=o$; wypada zrównanie $z\sqrt{(A^2+B^2)}=dw^5$, i linia krzywa ma przegięcie, czyli punkt zwrotu przeciwnego: zgoła ile razy z będzie dane przez funkcyą w stopnia niepárzystego, zawsze linia krzywa ma punkt zwrotu przeciwnego, nie ma zaś nigdy takiego punktu, kiedy z będzie funkcyą w stopnia párzystego. Wszystkie takowe odnogi uważane iakoby się składały z łuczków kół różnych, a dane przez zrównanie zamykaiące z w pierwszym stopniu nazywać będziemy Odnogami pierwszego porządku (*Rami primi ordinis*), na które zrównanie wzoru $z=\alpha w^n$.

Może się atoli przytrafić że w zrównaniu (λ) $A=o$, $B=o$, i terminy $Ct^2+Dtu+Eu^2$ rozbieraiąc się na dwa mnożniki nierówne pokażą punkt dwoisty, w którym się dwie odnogi przecinaią; na ten czas szukać nam potrzeba promienia ściskania na każdą z osobna odnogę: to iest przypuściwszy że dwa mnożniki $Ct^2+Dtu+Eu^2=o$, są $a't+b'u=o$, $c't+d'u=o$, położywszy na pierwszy $t=\frac{-a'z+b'w}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$, $u=\frac{-a'w-b'z}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$, na drugi zaś mnożnik $t=\frac{-c'z+d'w}{\sqrt{(c'^2+d'^2)}}$, - - - - $u=\frac{-c'w-d'z}{\sqrt{(c'^2+d'^2)}}$ w zrównanie (λ), przerobiemy ie na każdy z osobna - - $zw=\alpha w^3+\beta w^4+\delta w^5+\varepsilon w^6$ + i t. d. a gdyby punkt był troisty na zrównanie wzoru $zw^2=\alpha w^4+\beta w^5+\delta w^6+$ i t. d. każde z nich będzie wzoru

$$z=\alpha w^2+\beta w^3+\delta w^4+ \text{ i t. d.}$$

ieżeli α nie iest $=o$, promień szukany będzie $=\frac{1}{2\alpha}$; a gdyby było $\alpha=o$, na ten czas zrównanie na linią krzywą mięszaiącą się s podaną, będzie $z=\beta w^3$ i t. d. wszystkie te odnogi będą 1go porządku

rządku, i liniá krzywá będzie miała punkt zwrotu przeciwnégo, ieżeli wykładnik w będzie niepárzyfty; ale ieżeli tén wykładnik będzie párzyfty, żadnégo takiégo punktu nie będzie.

Inné zaś będą wypádki kiedy będąc $A=o$, $B=o$, $Ct^2+Dtu+Eu^2=(a't+b'u)^2$, to ieft że będzie zamykała funkcyá ta, dwa mnożniki równé, i dwie odnogi linii krzywéy będą fię dotykać; włożywfzy więc $t=\frac{-a'z+b'w}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$, $u=\frac{-a'w+b'z}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$ w zrównanié (λ), zamiéniémy ié na inné wzoru

$$z^2=\beta w^3+\delta w^4+\varepsilon w^5+ \text{ i t. d.} \quad - \quad - \quad (S'')$$

gdzie inné terminy zamykaiącé z fą opufzczoné iako niknącé. S tych zaś linią krzywą mięfzaiącą fię w małym łuczku z linią podaną wyrážać będzie zrównanié $z^2=\beta w^3$, albo $z^2=\delta w^4$, kiedy $\beta=o$; albo $z^2=\varepsilon w^5$ kiedy $\beta=o$, $\delta=o$, i t. d. Wfzyftkié té zrównaniá wyrážaią *Odnogi 2go porządku*, na które zrównanie ogólné ieft $r^2=A'w^n$, gdzie $n>2$. Ieżeli takowá odnoga będzie daná przez zrównanié $z^2=\beta w^3$, gdzie $n=3$, $z=w\sqrt{(\beta w)}=w^2\sqrt{(\frac{\beta}{w})}$, a przeto $w^2=\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{\beta}}z$, promień zaś ścifkaniá $=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{\beta}}$, który będzie zero, iéżeli $w=o$, to ieft krzywizna linii w tym punkcie ieft nieſkończenie wielká: aże w tę famę má wártość, kiedy z ieft dodatném lub odiemném, przeto liniá krzywá nie má punktu zwrotu przeciwnégo, ale KONCZYSTOŚĆ (*Cufpis*) przy M (fig. 34.) gdzie

Fig. 34.

koło zamiéniło fię w punkt, i odnogi linii krzywéy MS, MS' ftały fię obydwie wypukłé do ftycznéy ML, w obydwóch tych odnogach na z dodatné lub odiemné odpowiadá $w=RS$ dodatné, albo $=R'S'$ także dodatné. Ieżeli za n brać będziémy liczby niepárzyfté w zrównaniu $r^2=A'w^n$, wfzyftkié odnogi 2go porządku

ku będą miały kończystości przy M s tą różnicą, że iako na $n=3$ wypádł nám promień ściskaniá nieskończenie mały, tak na $n=5$, $n=7$, $n=9$, i t. d. wypadnie tenże promień nieskończenie wielki, ponieważ zrównanie n.p. $z^2=\varepsilon w^5$, daie $z=w^2\sqrt{w\varepsilon}$, promień ściskaniá $=\frac{1}{2\sqrt{w\varepsilon}}$, gdzie uczyniwszy $w=0$, promień ten będzie $=\frac{1}{0}$.

Należy nám tu iednak ostrzec, że w zrównaniu (S'') wzięliśmy tylko same funkcye w, opuściwszy inne terminy zamykaiące z, ieżeli atoli wrócemy się do stanu zrównaniá (S'') kiedy w niem przynáymniey pierwsze potęgi z ocalaią; będzie:

$$z^2=\alpha zw^2+\beta w^3+\gamma zw^3+\delta w^4+ \text{i t. d.}$$

gdzie łubo dlá wyliczonych iuż przyczyn αzw^2 możemy opuścić dla βw^3, tak iako γzw^3 dla δw^4, iednak $\beta=0$, αzw^2 niezniknie przed δw^4, i zrównanie się pozostanie $z^2=\alpha zw^2+\delta w^4$, które rozwiązáwszy co do z, ieżeli w niem $\alpha\alpha<-4\delta$, punkt M, będzie punktem sprzężonym, ieżeli zaś $\alpha\alpha>-4\delta$, odnoga 2go porządku będzie się składać z dwóch odnóg porządku pierwszego, i liniá krzywá będzie miała dwie odnogi dotykaiące się zewnątrz iak na fig. 35, albo dwie dotykaiące się wewnątrz iak na fig. 36. Fig. 35, 36.

Gdyby punkt do którego szukámy koła przystaiącego, był troisty, odnogi iemu odpowiadaiące mogą bydź trzy 1go porządku, albo iedna 1go, a druga 2go, albo nakoniec iedna 3go porządku, na którą wypadłoby zrównanie albo $z^3=\alpha w^4$, albo $z^3=\alpha w^5$, albo $z^3=\alpha w^7$, albo ogólnie $z^3=A'w^n$, gdzie $n>3$, i toż n iest cale nierozdzielne przez 3; te odnogi będą miały punkt zwrotu przeciwnego, ieżeli n będzie liczbą niepárzystą; ieżeli zaś n będzie liczbą párzystą, taki punkt nie będzie się znaydowáł w linii krzywey. Aże w zrównaniu $z^3=\alpha w^5=\frac{\alpha w^6}{w}$ - - -

$z=w^2\sqrt[3]{\frac{\alpha}{w}}$, skąd wypádá promień ściſkaniá $=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{w}{\alpha}}$, to ieſt $=o$, kiedy $w=o$; biorąc zaś wyżſzé potęgi od 6téy n.p. $z^3=\alpha w^7$ - - $z=w^2\sqrt[3]{\alpha w}$, skąd promień ściſkaniá wypádá $=\frac{1}{2\sqrt[3]{\alpha w}}$, przeto w odnogach 3go porządku kiedy $n<6$, promień koła przyſtaiącégo ieſt nieſkończenie mały; ieſt zaś nieſkończenie wielki kiedy $n>6$. Znáydziémy podobnie w odnogach 4go porządku że w nich promień ieſt nieſkończenie wielki, kiedy $n>8$; ieſt zaś nieſkończenie mały, kiedy $n<8$. wyraziwſzy takié odnogi zrównaniém $z^4=A'w^n$, gdzie $n>4$. a ieżeli n ieſt liczbą niepárżyſtą, wſzyſtkié té odnogi daią kończyſtość, tak iak odnogi 2go porządku. Więc ogólnie mówiąc: odnogi porządku m wyraziwſzy zrównaniém $z^m=A'w^n$, gdzie $n>m$, ieżeli m będzie párzyſté, n zaś niepárzyſté dadzą konczyſtość, czyli PUNKT ODBICIA *(Punctum reflexionis)*, którému będzie odpowiadáł promień ściſkania nieſkończenie mały, ieżeli $n<2m$, albo nieſkończenie wielki kiedy $n>2m$. A ieżeli w zrównaniu ogólném $z^m=A'w^n$, m, n, będą obydwa niepárzyſté, na tén czas odnogi porządku m, będą miały punkt zwrotu przeciwnégo, którému tak iak kończyſtości powinién odpowiadać promień ściſkaniá o, albo $\frac{1}{o}$. Mámy więc trzy odmiany w odnogach linii krzywéy, té bowiem odnogi iakiégokolwiek bądź porządku albo będą nieprzerwanie ciągłé kiedy promień koła przyſtaiącégo będzie miał wártość ſkończoną, albo maiąc wártość nieſkończenie wielką lub małą, kiedy zrównanié na łuki mięſzaiące ſię $z^m=A'w^n$ ieſt takie iż będąc $n>m$, m ieſt liczbą niepárzyſtą, n zaś pęrzyſtą. Albo te odnogi będą zamykać punkt odbiciá czyli kończyſtość, albo nakoniec punkt zwrotu przeciwnégo czyli przegięciá podług

chara-

charakterów dopieró od nás wyliczonych, dwa atoli te oſtatnie przypadki to maią iſtotnégo, że w obydwóch promień koła przyſtaiącego, czyli ściſkaniá musi bydź nieſkończenie wielki albo nieſkończenie mały.

Przykład. Niech będzie zrównanié na linią *3go* porządku $x^3+xy^2-ay^2=0$, - - (*L*) wynaleśdź liczbę odnog nieſkończonych przez ledwo-nieſtyczną téy linii krzywéy? powtóre: czy ma punkt dwoiſty? w tym punkcie czy ma przegiętość czy kończyſtość? Co do piérwſzégo - - $x(x^2+y^2)-ay^2=0$: ponieważ termin náywyżſzego wymiáru zamyká tylko iednégo mnożnika rzetelnego x, a dwóch uroionych - - $(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})$, przeto podług §. 18. $a=0$, $b=-1$, $y=-t$, $x=u$: włożywſzy té wártości w zrównanié (*L*), zamieniám ié na $u^3+ut^2-at^2=0$, uczyniwſzy $t=\frac{1}{0}$, otrzymuię $u=a$, a przeto $(u-a)t^2+a^3=0$, zrównanié na ledwo-nieſtyczną hyperboliczną, czyli $u-a=\frac{-a^3}{t^2}$; liniá więc krzywá opiſaná zrównaniém (*L*) należy do *2go* rodzaiu linii *3go* porządku maiących ledwo-nieſtyczną wzoru $u=\frac{A}{t^2}$, i taż liniá krzywá má dwie odnogi nieſkończoné między ſobą równé, poniéwáz na t dodatné lub odiemne, odpowiadá ta ſama wártość u.

Cissois i iey własności.

Chcąc teráz wiedzieć czy tá liniá krzywá má przegięcié lub punkt zwrotu przeciwnégo, czynię naprzód $x=p$, $y=q$, zrównanié podané zamienia ſię ſię na - - $p^3=aq^2-pq^2$ - - (*L'*), powtóré kładę w (*L*) $x=p+t$, $y=q+u$, a odrzuciwſzy terminy zamknięté w zrównaniu (*L'*) wypádá mi

$$(3p^2+q^2)t-(2aq-2qp)u+3pt^2+2qtu-au^2+t^3+tu^2+pu^3=0 \quad (L'').$$

znoſzę to zrównanié z (λ) §. 23, i otrzymuię wártość wſpół-czynników - - $A=3p^2+q^2$; $B=2qp-2aq$; $C=3p$; $D=2q$; $E=-a$, $F=1$, $G=0$, $H=1$, $I=p$, kładę té wártości za *A*, *B*, *C*, i t. d. w zrównanié

 (*R''*),

(R''), i otrzymuię promień ściſkaniá,

$$= \frac{q^3(pa+p^2+q^2+4a^2)^{\frac{3}{2}}}{6p(2pq-2aq)^2-4q(3p^2+q^2)(2pq-2aq)-2a(3p^2+q^2)^2}$$

czynię mianownika tego ułomku zero, to ieſt $p=o$, $q=o$, przez co zrównanié (L'') zamieni ſię na - - $-t^3-tu^2+au^2=o$ - - (N), termin drugiégo wymiaru au^2 tego zrównaniá má dwóch mnożników równych, to ieſt $(u\sqrt{a})^2$ skąd otrzymuiémy $t=w$, $u=-z$, włożywſzy té wártości za t, u, w (N), zamiéniámy ié na $-w^3-wz^2+az^2=o$ - - (N'). gdzie podług wyłożonych przyczyn $-wz^2$ zniknie, zoſtawiwſzy $w^3=az^2$, czyli - - $w^2=z\sqrt{wa}$, promień koła przyſtaiącégo $=\frac{1}{2}\sqrt{aw}$: więc liniá krzywá opiſaná zrównaniém (L), má kończyſtość w punkcie dwoiſtym, gdzie koło przyſtaiącé zamiéniá ſię na punkt, bo promień iego ieſt nieſkończenie mały. S tych właſności łatwo nám ieſt widzieć, że tá liniá krzywá

Fig. 37. má ryſunek taki, iaki nám pokazuie fig. 37, gdzie od punktu odbiciá M roſchodzą ſię dwie odnogi nieſkończoné MS, MR, do których NO ieſt ledwo-nieſtyczną proſtą; co ſię właśnie pokazuie s ſamégo zrównaniá (L), gdzie $y^2=\frac{x^3}{a-x}$, $y=\pm x\sqrt{\left[\frac{x}{a-x}\right]}$; $ML=a$; M będąc początkiém odcinków, ieżeli $a=x$, $y=\infty$; ieżeli $x=o$, $y=o$; na x odiemne wſzyſtkié wártości y ſtaią ſię uroioné, i liniá krzywá za punkt M nie przechodzi: liniá tá zwážáná ieſzcze od dáwnych Geometrów, nazwaná ieſt *Ciſsois*.

Krótki zbiór nauki całégo rozdziáłu.

Linie krzywé iakożkolwiek naturą między ſobą różné potrafiliśmy między ſobą równać i ſtóſować za pomocą granic ilości wzráſtaiących i ubywaiących. Związki różné ilości odmiennych w zrównaniu, wyrážaiąc zbiór cale innych właſności, oddzielały każdą linią krzywą od innych: tak dalece, że przeſtawſzy na ſamém roſtrząſaniu piérwiáſtków zrównaniá, poznanie linii krzywych wyżſzych porządków nad drugi, zoſtałoby było zakryté przed rozumém naſzym

aż do

aż do większéy doskonałości Algebry; powtóre wszystkie różnice linii krzywych tego samego porządku nie stósowane do ogólnieyszégo początku, włożyłyby były prawo na rozum nasz i pamięć, zatrzymania szczególnych charakterów i właśności każdéy linii, aby ią rozeznać od innych: zrównania nakoniec iednéy linii krzywéy brać mogące różne postaci bez odmienienia iéy nátury, wyciągałaby zawsze po nás tylé szczególnégo róstrząsania do wydobycia właśności w nich zawartych. Kiedy teorya granic skazuiąc nám náyogólnieysze linii cechy, uwálnia nás od tych szczególnych i zawikłanych dostrzeżéń, i poddaie spólné właśności i podobieństwa iednych do drugich służące za grunt do podziału nowégo linii w każdym porządku na swé rodzaie. Granice ilości odmiennych odciąwszy wszystkié szczególności każdéy linii krzywéy, odkryły nám przez dwoiakiégo rodzaiu styczné to, co może bydź spólnégo iednéy linii z drugą, i to co ie istotnie od siebie oddzielá: a zamieniaiąc iedné związki na drugié prościéysze, w kombinacyach tych zamián teoryá ta wytknęła nám náyodległéysze cechy zró-wnáń. Każdé bowiem zrównanie zamiénić się może na innych barzo wielé przez niszczenie niektórych w sobie terminów; w tych atoli zamianach zostanie coś spólnégo lub istotnie różniącégo to zrównanié od innych w tym sposobie uważanych, co nám odkrywá piętno oddziału, lub podobieństwa tego zrównania do drugich, a przez to i linii krzywych w nich zawartych. Korzyść ieszcze náycelnieysza która nám s takich wypadła uwág, iest porównanié linii krzywych z innémi prościéyszémi. Oderwiymy na moment umysł od Geometryi, i wynieśmy do powszechniéyszych obrazów tén początek granic, a znaydziémy w nim cale nowé sposobu Analitycznégo prawidło.

Uważaiąc dwie rzeczy wszystkiémi właśnościami od siebie różné, a nie mogąc dlá iakichkolwiek przy-

Wykłada się drugi początek Analityczny, który ieſt wypadkiem uwág teraźnieyſzego rozdziału.

czyn doſtrzec związku między niemi, gubię w umyśle wſzyſtkie te różnice: a przez to zamieniam rzecz na inną cale różney natury, i cale do ſiebie niepodobną; to ſamo działanie wykonywam i w drugiey rzeczy: a tak obie przetworzywſzy na nowe iſtoty, równam te że tak rzekę nowe ſtworzenia umyſłu s ſobą, umieſzczaiąc w iedney klaſsie te, w których coś ſpólnego upatrzyłem, a oddzielaiąc od ſiebie te w których mi ſię pokázała różnica. Nowe te iſtoty ſą granicami rzeczy przetworzonych, do których one ſię zbliżaią tracąc s ſwoich właſności, ale których doſiąc nie mogą chyba odmieniwſzy całkiem ſwoię naturę. Wracam ſię potem do pierwſzych obrazów, i ieżelim nic ſpólnego nię widział w tem czem ſą, nauczyłem ſię tey ſpólności w tem, na co ſię mogą zamienić. I ten to ſpoſób myślenia ieſt iak widzemy náydelikatnieyſzą ucieczką porównywania, który iak ſzczęśliwie Geometryi poſłużył, nawet w poznawaniu przypadków natury, świadkiem ieſt cała Fizyka matematyczna. Widzemy iuż, że pierwſzy początek analityczny w całem świetle od nas w Algebrze wyſtawiony, zależy na upatrywaniu związku między rzeczami przez porównywanie tego, co ieſt rzeczom przy ſwey naturze zoſtawionym ſpólnego; drugi zaś na doſtrzeganiu i porównywaniu tego, co im zoſtanie ſpólnego odmieniwſzy ich naturę. Tamten ieſt ſpoſobem Matematyki początkowey, ten zaś Matematyki wyżſzey. Cały ciąg prawd teraźnieyſzego rozdziału dał nam uczuć, iak ieſt wielka rozległość tego oſtatniego ſpoſobu, którego dokładnieyſze wyłożenie i rozebranie ſkłada część barzo obſzerną Matematyki wyżſzey nazwaną RACHUNKIEM DYFFERENCYALNYM I INTEGRALNYM. Właſności ſtycznych iako były dla nas pierwſzem źrzodłem s którego ten ſpoſób wypłynął, tak dały początek dopiero wzwiankowanemu rachunkowi.

Wſzyſtkie właſności linii krzywych zawiſłe od ſtycznych i doſtępne Algebrze zamknęliśmy w tym rozdziale:

zdziále: zoſtaie nám ieſzcze roſtrząſnąć wſzyſtkié przecięciá zachodzącé w liniach krzywych iakiégokolwiek porządku, co będzie przedmiotem Rozdziału naſtępuiącégo.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

Roſtrząſaią się wſzyſtkie Przeciecia linii krzywych od proſtych lub innych krzywych: które prowadzą nás do innégo ieſzcze ſpoſobu wyrażaniá linii iakiégokolwiek porządku, i do poznaniá składni zrównáń.

§. XXIV.

Liniá krzywá przeciętą bydź może od proſtéy tak, iż płaſzczyzna między obwodem linii krzywéy położoná rozdzieli ſię ná części równé i podobné, i takowe przecięcie ſłuży śrzednicom: albo też liniá proſtá prowadzoná zewnątrz lub wewnątrz linii krzywéy przeciná ią tak, iż s tego przecięciá nic więcéy nie wynika, prócz że liniá proſtá má ieden lub kilka punktów ſpólnych z linią krzywą: i takowé przecięcié ſłużyło nám do wyrážaniá linii krzywych przez związek linii przecinaiącéy z inną linią proſtą, któreśmy wſpół-uſzykowanémi nazwali. Uważaliśmy iuż w liniach 2go porządku oba té gatunki przecięciá, które nám teráz roſtrząſać náleży we wſzyſtkich porządkach wyżſzych ſpoſobém cale różnym. Tam bowiem zrównanié 2go ſtopnia prowadziło nás przez uwágę iego właſności do właſności cięciw lub śrzednic; tu zaś od właſności nadanych śrzednicom lub iakimkolwiek liniom proſtym przecinaiącym, przyiśdź nám potrzeba do zrównáń ogólnych takowé właſności wyrażaiących; a w tych dopiéro doſtrzegać któremu porządkowi linii té właſności ſłużą. Spoſób takowy dociekániá wypádá s ſpoſobu uwá-

Właſność śrzednic rościągnioná do linii krzywych iakiegokolwiek porządku.

żania linii krzywych; chcémy bowiem poznać ich właſności, nie rozwiązuiąc ich zrównań. Zaczniymy od śrzednic: ponieważ śrzednica dzielić powinna linią krzywą na części równé i podobné, liczba takowych części zawiſła od liczby śrzednic, i tak na fig. 38. ieżeli liniá krzywá iednę má tylko śrzednicę *AB*, połowa iey położoná nad *AB*, bydź powinna równá i podobná drugiéy połowie leżącéy pod *AB*: maiąc zaś dwie śrzednice *AB*, *CD* przecinaiącé ſię pionowo w punkcie *S'*; liniá krzywá rościęta ieſt na 4 części *P*, *Q*, *R*, *S*: s których mogą bydź albo wſzyſtkié między ſobą podobné i równé, albo dwie którékolwiek. Zebyśmy każdą parę takowych części rozeznać mogli, nazywać będziémy części leżącé z dwóch ſtron *S'C*, albo *S'D*, czyli *P*, *R*, lub *S*, *Q*; częściami *przyległémi*, w których różnica zachodzi wyrażoną przez znak dodatny lub odiemny odcinków *x*; części leżące z dwóch ſtron linii *S'B*, czyli *P*, *Q*, nazywać będziemy częściami *przeciw-ległémi*, których cechą ſą znaki dodatné i odiemné przyſtáw *y*, biorąc zawſze *S'* za początek odcinków: części nakoniec leżacé między kątami wierzchołkowémi, iako to *CS'A*, *BS'D*, czyli *R*, *Q*; lub dwie inné *P*, *S* nazywać będziémy częściami na *przemián przeciw-ległemi*, w których znaki obydwóch wſpół-uſzykowanych zachodzą przeciwné.

Fig. 38.

Cechy na rozeznanie śrzodka w linii krzywéy, wyrażoné przez zrównaniá.

Kiedy liniá krzywá má części przyległe, albo części przeciw-ległé między ſobą równé, chcąc każdą s takowych części rozdzielić na części znowu równé tak, aby każdá s takowych mniéyſzych części była równą drugiéy w ſtronie odpowiadaiącéy równéy; takowé podziáły albo niemogą bydź czynioné w dwóch razem ſtronach przez iednę linią proſtą, n.p. w ſtronach przeciw-ległych *P*, *Q*; albo nawet mogąc takowé różné przedziáły czynić, iąkby ſię zdawało náypodobniéy w ſtronach przyległych *P*, *R*; *Q*, *S*, liniá proſtá dzieląca takowé ſtrony nie będzie koniecznie w ſamym śrzodku przeciętá od drugiéy *AB*; bo ieżeli n.p.

li n.p. ſtrona P ieſt równá ſtronie R, i znowu ſtrona Q równá ſtronie S, nie idzie zatem koniecznie, żeby ſtrony $P+R$ były równe ſtronóm $Q+S$; ale tylko wypádá s tego koniecznie, że ſtrony $P+Q=$ ſtronom $R+S$, i że liniá CD ieſt prawdziwą śrzednicą linii krzywéy: oddzieliwſzy przeto ſtrony równe R, P, od innych równych Q, S, przez linią AB; ta liniá nie przetnie koniecznie śrzednicy CD w ſwóim śrzodku. Podobnie rozumuiąc na ſtrony przeciw-ległe P, Q; R, S; znáydziem że kiedy $P=Q$, i znowu $R=S$; nie idzie zatém że $P+Q=R+S$; ale tylko s tego wypádá, że $P+R=Q+S$, a przeto że w tym razie AB ieſt śrzednicą linii krzywéy; ale linia CD nie koniecznie przetnie AB w ſamym śrzódku. Kiedy zaś liniá krzywá má części na *przemián przeciw-ległe* między ſobą równe, to ieſt $P=S$; $R=Q$; wypádá stąd koniecznie że nie tylko $P+R=Q+S$; ale ieſzcze że $P+Q=R+S$, więc część linii krzywéy leżąca nad linią AB, ieſt równá i podobná części leżącéy pod AB; i znowu część leżącá z iednéy ſtrony CD ieſt równá i podobná części położonéy z drugiéy ſtrony CD; a stąd wypádá że liniá AB dzieląc na dwie połowy linią krzywą, i CD dzieląc ią także na dwie połowy, AB, CD przecinaią ſię w ſamym śrzodku S'; liniá przeto krzywá maiąc ſtrony na przemián-przeciw-ległe równe, má razém śrzodek S' w którym ſię iéy śrzednice przecinaią i dzielą na dwie części równe: linie zaś krzywe maiące tylko ſtrony przyległe, lub ſtrony przeciw-ległe ſobie równe, maią tylko śrzednicę CD w piérwſzym; śrzednicę zaś AB w drugim przypádku. Zebyśmy więc mogli z zrównania rozeznać kiedy liniá krzywá má śrzodek, a kiedy má śrzednicę, potrzeba nám wyrazić znamiona tąkowych właſności przez ogólne zrównaniá, a z nich dopiéro będziémy w ſtanie ſądzić o ieſteſtwie śrzodka lub śrzednicy linii krzywéy.

Zeby w linii krzywéy ſtrona P, była równá i podobná ſtronie Q; potrzeba żeby przyſtawy na ſtronie

 P, były

P, były równe przystawom leżącym na stronie Q, to iest wziąwszy S' za początek odcinków, potrzeba aby w zrównaniu na linią krzywą nic się nie odmieniło, kładąc w niém $-y$ na mieysce $+y$; więc potrzeba żeby w tém zrównaniu liniá krzywá była wyrażoná przez x, i przez samé potęgi párzysté y, czyli aby to zrównanié powstało s funkcyi x, y^2; zrównanié więc $Z=o$, na linią krzywą maiącą strony przeciw-ległé równé i podobné, a przeto średnicę AB, powinno bydź wzoru.

$$o=a+bx+cy^2+dxy^2+ex^2+fy^4+gy^6+ \text{ i t. d.}$$

takiémi są wszystkié linie 2go porządku, i s trzeciégo Cissois uważaná od nás pod §. 23.

Zeby liniá krzywá miała stronę $P=$ stronie R, potrzeba aby w iéy zrównaniu nic się nie odmieniło przenosząc współ-uszykowane s strony P na R, czyli kładąc $-x$ na mieysce $+x$; a przeto potrzeba aby w zrównaniu $Z=o$, Z było funkcyą y i samych potęg párzystych x, czyli żeby było funkcyą y, xx. Zaczém liniá krzywá będzie miała strony przyległé równé i podobne, a przez to średnicę CD, ieżeli będzie wyrażoná przez zrównanie wzoru:

$$o=a+by+cx^2+dyx^2+ex^4+fy^2x^2+gx^6+ \text{ i t. d.}$$

Strony na przemián przeciw-ległé będąc równé i podobné iako to $R=Q$, $P=S$, wyciągaią, aby zrównanié zostało w niczém nieodmienné przenosząc współ-uszykowané s strony R na stronę Q; aże w stronie R znaki współ-uszykowanych są $+y$, $-x$; w stronie zaś Q, $-y$, $+x$; więc w zrównaniu $Z=o$ nie powinno się nic odmienić, kładąc $-y$ za $+y$; $+x$ za $-x$, a przeto Z powinno bydź funkcyą samych potęg párzystych x, y; czyli Z powinno bydź funkcyą x^2, y^2, a przeto zrownanié wzoru:

$$o=a+bx^2+cy^2+dx^2y^2+ex^4+fy^4+gx^2y^4+ \text{ i t.d. } (A).$$

gdyby ieszcze Z było funkcyą samych potęg niepárzystych x, y; odmiéniwszy do teraźniéyszégo przypadku $+x$ na $-x$, $+y$, na $-y$ calé zrównanié byleby nie zamykało żádnégo terminu statecznégo, z $Z=o$

zamiéni

zamieni ſię na $-Z=o$, co iak wiémy wſzyſtko iedno znaczy; więc ieſzcze kiedy Z będzie zamykało ſamé potęgi lub mnogości niepárzyſté, x, y, bez żádnégo terminu ſtatecznégo, to ieſt kiedy będzie zrównanié wzoru

$$o=ax+by+cz^3+dx^2y+cxy^2+fy^3+gx^5+hyx^4+ \text{ i t. d.} \quad (A').$$

liniá krzywá takowém zrównaniém opiſaná má ſtrony na przemián przeciw-ległé równé i podobné, a przeto środek S'. Piérwſzé zrównanié (A) na teraźnieyſzą właſność, zamykaiąc potęgi párzyſté y, pokazuie ieſzcze ſtrony przeciw-ległé równé i środnicę AB w linii krzywéy: to ſamo zamykaiąc wſzyſtkié potęgi párzyſté x, wyráżá ſtrony przyległé P, R, równé, i śrzednicę CD; więc zrównanié A wyráżá wſzyſtkié cztéry ſtrony równé i podobné w linii krzywéy, ná któré ią rozdzielaią dwie śrzednice AB, CD, do ſiebie pionowé. Skąd ſię oczywiście wnoſi, że ſamé tylko linie krzywé porządków párzyſtych mogą mieć cztéry odnogi równé i podobné, i dwie śrzednice pionowé przecinaiącé ſię w śrzodku S'. Zrównanié (A') wyráżá także śrzodek w liniach krzywych, który może ſię znaydować w porządku párzyſtym lub niepárzyſtym; ale nie wyráżá śrzednic pionowych. Zatrzymáymy ſię nad rozległéyſzém poznaniém właſności w zrównaniu (A') zawartych, kiedy śrzednice przecinaiącé ſię w śrzodku ſą nachyloné do ſiebie kątém ukośnym.

Ieżeli linie proſté AB, CD na fig. 39 ſą śrzednicami linii krzywéy; część leżącá nad CD ieſt równá i podobná części leżącéy pod CD, i znowu część leżącá pod AB ieſt równá i podobná części leżącéy nad AB, i oprócz tego ſtrony na przemián przeciw-ległé ſą także równé i podobné. Nazwiymy część leżącą nad AB, P; część pod AB, Q; część między $AS'C$, niech będzie R, część między $BS'D$, S; ponieważ $P=Q$; $R=S$; $P-R=Q-S$, a przeto $P-2R=Q-2S$, wziąwſzy więc kąt $CS'E=$ kątowi $AS'C$; EF będzie także śrzednicą przeciętą w S' na dwie części równé:

Fig. 39. O śrzednicach ukośnych i ich liczbie.

aże ieszcze $P-3R=Q-3S$, - - $P-4R=Q-4S$ - - i ogólnie $P-nR=Q-nS$, idzie zatém że prowadząc linie proste przez środek S' tak, aby czyniły między sobą kąty równe kątowi $AS'C$; trafiemy na linią AB, ieżeli stósunek kąta $AS'C$ do kąta prostego iest wymierny; i wszystkie te linie będą średnicami linii krzywey: podług więc wielkości kąta $AS'C$ między dwoma pierwszémi średnicami, linia krzywa maiąc strony na przemian przeciw-legle równe, mieć może dwie, trzy, cztéry, n średnic: to iest, biorąc zawsze ten kąt $AS'C$ iako maiący stósunek wymierny do kątu prostégo, im kąt tén iest większy, tém mnieyszá liczba wypadnie średnic, im zaś kąt tén iest mnieyszy, więcey średnic ukośnych linia krzywa zamyka: to iest że liczba średnic w linii krzywéy iest w stósunku spacznym wielkości kąta między dwiema pierwszémi średnicami zawartégo: ieżeli więc kąt $AS'C$ iest nieskończenie mały, czyli kiedy linia CD iest równo-legła linii AB, linia krzywa ma nieskończoną liczbę średnic między sobą równó-odległych, a przeto przystawa przecina takową linią krzywą w nieskończoney liczbie punktów, co nie może służyć żadnym liniom Algebraicznym, ale tylko liniom krzywym przestępnym. Zadna więc linia krzywa Algebraiczna nie może mieć dwóch średnic między sobą równo-ległych. Gdyby zaś stósunek kąta $AS'C$ do kąta prostego był niewymierny, linia krzywa miałaby nieskończoną liczbę średnic przecinaiących się w punkcie S': co służy kołu iak wiemy z Geom: począt:

To zaś iest o tych średnicach uwagi godnégo, że ponieważ z obydwóch stron średnicy linia krzywa mieć powinna równy kształt i ułożenie; ieżeli na fig: 39 nad CD linia krzywa takiego iest kształtu iak i pod CD, i ieżeli pod CS' znayduie się średnica AB maiąca z obydwóch stron iednym kształtem ułożoną linią krzywą; idzie zatém że przy EF taka iest postać linii krzywéy iak przy AB, czyli ze średnice na

Fig. 39.

przemian

przemián iakié ſą AS', ES'; potém CS' GS' ſą iednégo gatunku, i zrównanié na linią krzywą powinno bydź takié biorąc EF za oś, iakiém ieſt odnoſząc wſpół-uſzykowané do osi AB: i znowu to zrównanié bydź powinno takie do GH, iakiém było do osi CD. Wláſność ta śrzednic na przemián idących ſłużyć nám może za grunt dochodzenia liczby śrzednic w liniach krzywych iakiégokolwiek porządku. Zaiſte, ieżeli AB, EF n.p. ſą śrzednicami iednégo gatunku, naprzód zrównanié bydź powinno nieodmienné wyrážaiąc linią krzywą nad, i pod śrzednicą AB; powtóre to zrównanié ieſzcze powinno zoſtać to ſamo przenoſząc ié z osi AS' na oś ES': które to przypádki nie mogą bydź znaczoné tylko przez funkcyą kąta branego náprzód z różnéy ſtrony téy ſaméy osi AS', a przeto dodatnié lub odiemnié: powtóre, przez funkcyą kąta przenoſzonégo z osi AS' na oś ES'.

Chcąc przeto wiedzieć kiedy liniá krzywá má pewną liczbę śrzednic, potrzeba nám na każdą liczbę znaleśdź cechę wyrażoną przez zrównanié pewnégo wzoru: tén zaś wzór zoſtać powinien nienaruſzony ſtóſuiąc go do funkcyi kątów dopiero opiſanych. Weźmy ſobie na to linią SM z śrzodka do obwodu linii krzywéy pociągnioną, przez którą znaczyć będziémy różné położenié wſpół-uſzykowanych $S'P=x$, $PM=y$, względem śrzednic iednego gatunku za pomocą kąta $PS'M=\phi$: liniá $S'M=z=\sqrt{(x^2+y^2)}$. Przypuśćmy náprzód że liniá krzywá má tylko dwie śrzednicé AB, GH: ponieważ ułożenie linii krzywéy takié bydź powinno nad AS' iak i pod AS', i znowu to ułożenié zoſtać powinno takié przy $S'B$, iakié ieſt przy AB; więc zrównanié na linią krzywą maiącą dwie śrzednice bydź powinno takié, aby w niém $S'M=z$ zoſtało nieodmienné, biorąc kąt ϕ dodatny i odiemny, i oprocz tego kąt $MS'B=P-\phi$, (tu P wyraża pół-obwodu koła;) więc z bydź powinno funkcyą taką, którąby była nieodmienná na kąty ϕ, $-\phi$,

 $P-\phi$;

$P-\phi$; wiémy z Rozd. 4. Algebry Części II. że dostawa iest ta sama na kąt wzięty dodatnie lub odiemnie, wstawa zaś na kąt dodatny, dodátná; na odiemny staie się odiemną: ale dostawa poiedyncza na kąt $P-\phi = -$ *Dost.* ϕ, Dostawa zaś na kąt $2(P-\phi)=$ *Dost.* 2ϕ: aże znowu *Dost.* $2\phi=$ *Dost.* -2ϕ, więc Dostawa 2ϕ iest funkcyą taką, która na kąty ϕ, $-\phi$; $P-\phi$; zostaie nieodmienną. Przeto żeby linia krzywá miała dwie śrzednice, powinno zrównanié $Z=0$, bydź takié, aby Z było funkcyą z i *Dost.* 2ϕ: aże $z=\sqrt{(x^2+y^2)}$ - - *Dost.* $\phi=\frac{x}{z}$, *Wst.* $\phi=\frac{y}{z}$, *Dost.* $2\phi=$ $\frac{x^2-y^2}{z^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, przeto na dwie śrzednice w zrównaniu $Z=0$ linią krzywą wyrážaiącém, Z bydź powinno funkcyą x^2-y^2, x^2+y^2, czyli funkcyą x^2, y^2, iakośmy iuż wynaleźli.

Ieżeli liniá krzywá má trzy śrzednice AB, EF, IK; poniewáż śrzednica IS' iest tego samégo gatunku co i AS', zrównanié linią tę krzywą wyrážaiącé bydź powinno nieodmienné, biorąc współ-uszykowané z iednéy i drugiéy strony lnii AS' i znowu przenosząc ié z śrzednicy AS' na śrzednicę IS'; aże kąt który czynią między sobą té tzy śrzednice, iest $=\frac{1}{2}P=60°$. kąt zaś $AS'I=2.60°=\frac{2}{3}P$, kąt $MS'I=\frac{2P}{3}-\phi$, więc w zrównaniu $Z=0$. wyrážaiącém linią krzywą s trzema śrzednicami, Z bydź powinno funkcyą nieodmienną na kąty $+\phi$, $-\phi$, $\frac{2}{3}P-\phi$; co służy tylko Dostawie $3\phi=$ *Dost.* $-3\phi=$ *Dost.* $(2P-3\phi)$: aże podług § 51. zrównań (x) w Algebrze, *Dost.* $3\phi=2.$ *Dost.* ϕ *Dost.* $2\phi-$ *Dost.* $\phi.=\frac{x^3-3y^2x}{z^3}$, więc Z powinno bydź funkcyą x^2+y^2, x^3-3y^2x, ieżeli zrównanié $Z=0$ má

wyrážać

wyrážać linią krzywą trzy śrzednice maiącą. To ſamo rozumowanie ciągnąc daléy, znáydziémy; że w zrównaniu Z=o na linią krzywą maiącą cztéry śrzednicé, Z bydź powinno funkcyą z czyli x^2+y^2, i Doſtawy, 4ϕ. i ogólnie: na linią krzywą maiącą n śrzednic, Z bydź powinno funkcyą x^2+y^2, i Doſt.$n\phi$; wiedząc z §. 54. Algebry, że

$$Doſt.n\phi = x^n - \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.} x^{n-4}y^4 - \text{ i t. d.}$$

podobnym ſpoſobém wynaleśdź byśmy mogli zrównaniá na linie krzywé maiącé części równé i podobné.

Inny ſpoſób wynaydowaniá śrzednic w liniach krzywych.

Inné ieſzcze właſności śrzednic doſtrzeżoné w Rozdziale II. a zręcznie rościągnioné do wyżſzych porządków linii, ſłużyć by nám mogły do wynaydowaniá cech pokazuiących śrzednice w iakichkolwiek liniach krzywych. Widzieliśmy n.p. w §. 8. że śrzednice przedzielaią cięciwy równo-ległé na dwie części równé, czyli ogólniéy: że przyſtawa náleżącá do śrzednicy ieſt równá ſummie piérwiáſtków przez 2 rozdzieloney: *Powtóré* że mnogość dwóch przyſtáw do tego ſamégo odcinku náleżących, ieſt do mnogości dwóch przecięć linii krzywey od osi, w ſtoſunku nieodmiennym, Té dwa początki rościągaiąc do wyżſzych porządków linii, wyſtáwmy ſobie zrównanié iakiégokolwiek ſtopnia, w którém y ieſt tylko wymiaru drugiégo, wſzyſtkié zaś potęgi x temu ſtopniowi náleżyté, to ieſt: $y^2-Py+Q=o$, gdzie P, Q, ſą funkcyami x; liniá takiém zrównaniém opiſaná dwá razy tylko przeciętą bydź może od przyſtawy PM, PN, na fig. 40: rozdzieliwſzy każdą z cięciw równo-ległych MN na dwie części równé przy O, O′, O″, punkta té przedziału O, O′, O″, leżyć mogą na linii proſtéy lub krzywéy: w piérwſzym przypádku wypadnie śrzednica na linią podaną takiégo rodzaiu iak na linie krzywé drugiégo porządku: całé więc pytanié zawiſło od wynalezieniá czyli punkta O, O′, O″ náleżą Fig. 40.

O'' náleżą do linii proftéy lub krzywéy, o czém nás nauczyć powinién wfpół-czynnik 2go terminu P: wiémy bowiem że $MP-PN=P$, a przeto $-PO=\frac{P}{2}$; ieżeli to oftatnié zrównanié ieft na linią proftą, liniá krzywá iakiégokolwiek porządku opifaná zrównaniém $y^2-Py+Q=o$, będzie miała śrzednicę taką, iakąśmy w drugim porządku widzieli. Weźmy fobie n.p. zrównanié na linie 3go porządku s §. IV uczyniwfzy w niém $k=o$, i ułożywfzy ié potém co do y; będzie

$$y^2+\frac{hx^2+ex+c}{ix+f}\,y+\frac{gx^3+dx^2+bx+a}{ix+f}=o.$$

gdzie $P=-\frac{hx^2+ex+c}{ix+f}$, $Q=\frac{gx^3+dx^2+bx+a}{ix+f}$, nazwáwfzy $PO=z$, zrównanié na śrzednice będzie $2z=\frac{hx^2+ex+c}{ix+f}$: ieżeli licznik tego ułomku ieft zupełnie rozdzielny przez mianownika $ix+f$; zrównanie to wyrážać będzie linią proftą, i liniá 3go porządku będzie miała śrzednicę: ale kiedy hx^2+ex+c, będzie rozdzielné przez $ix+f$, uczyniwfzy $ix+f=o$, wypádá koniecznie $hx^2+ex+c=o$, czyli włożywfzy w to oftatnie zrównanié $x=-\frac{f}{i}$, wypadnie . .

$hf^2-efi+ci^2=o$ zrównanié warunkowé, którému trzeba żeby fię ftało zadofyć, aby liniá 3go porządku miała śrzednicę proftą; do tego zaś przydadź iefzcze należy $k=o$. Ieżeli zaś hx^2+ex+c, nie będzie rozdzielné zupełnie przez $ix+f$, punkta O, O' O'' będą leżyć na linii krzywéy 2go porządku opifanéy zrównaniém $x(2iz-hx)+2fz-ex-c=o$; ażeby termin naywyżfzégo wymiáru w tém zrównaniu, zamyká dwá mnożniki rzetelné nierówné; punkta O, O', O'', i t. d. leżą na Hyperboli.

Ilé razy więc w zrównaniu $y^2-Py+Q=o$, $P=a+bx$, liniá

liniá krzywá má średnicę: takowá średnica przedzielaiąc wſzyſtkie przyſtawy má dwie części równé, czyni ieſzcze *P* iako ſummę wſzyſtkich pierwiaſtków ilością ſtateczną: skąd wypádaią dochodzeniá linii krzywych, w którychby ſumma pierwiáſtków, lub funkcyá iaká takowey ſummy była ilością ſtateczną. Toż ſamo wynayduiąc na *Q*, iako na mnogość wſzyſtkich pierwiáſtków, przyſzlibyśmy do wielu práwd o liniach krzywych na iakiekolwiek porządki.

§. XXV.

Powiedzieliśmy że wſzyſtkié właſności w liniach krzywych náleżą albo do ſtycznych, albo do średnic albo do cięciw: i ta práwda doſtrzeżoná w porządku drugim a upowſzechnioná w Rozdziale poprzédzaiącym, i na początku teraźnieyſzégo, przywiodłá nás na porządki niżſzé linii do rozległéyſzych práwd, które od ſtycznych i średnic zawiſły. Nie zoſtaie nám tylko roſtrząſnąć ogólniey przecięciá linii krzywych od cięciw, albo raczéy właſności linii proſtych maiących punkta ſwoié ſpólné z linią krzywą. W czém rozróżnić nám potrzeba dwa przypádki. *Pierwſzy:* kiedy liniá proſtá przecinaiąc krzywą odmieniá ſwoie położeniá i znaczy punkta linii krzywéy; iaką była zawſze przyſtawa odnoſzoná do pewnych odcinków: takowá liniá proſtá nie ieſt wyrażoná oſobném zrównaniém, ale tylko ieſt funkcyą odmienną wchodzącą w zrównanié. *Drugi przypádek:* kiedy liniá proſtá przeciąwſzy linią krzywą má położenié nieodmienné, i ieſt wyrażoná właściwém zrównaniém: i na tén czás punkt przecięciá będąc ſpólny dwóm liniom wyráża ſię przez dwa zrównaniá.

Przypádki ieſzcze zachodzącé w przecięciach linii krzywych od proſtych.

Zatrzymáymy ſię nád dwiema temi przypádkami porządnie. Co do pierwſzégo: każdá odmianá linii proſtéy przecinaiącéy, idącá za odmianą punktów linii krzywey ſłużyć może do wyrażeniá przez zrównanié natury tey oſtatniéy linii. Przyſtawy iakieśmy dotąd uważáli odmieniáły tylko ſwoię wielkość zoſtawſzy między ſobą równo-ległé. Wyſtáwmy ſobie

Spoſób wyrážaniá linii krzywych przez zrównanié, kiedy kąty ſą ilościami odmiennemi.

Fig. 41. ſobie teráz inną odmianę na fig. 41. kiedy liniá *CM* przecinaiąc linią krzywą u *M*, *N*, odmieniá nie tylko ſwoię wielkość, ále i położenié względem linii *CP*, cała takowá odmiana zawiſła od odmiany kąta *PCN*, który ſwoim wzroſtem lub ubywaniém oznácza piérwiáſtki rzetelné lub uroioné w zrównaniu, daiąc położenie linii *CM* takié, iakié ieſt potrzebné żeby liniá krzywá była przeciętą albo chybioną od proſtéy: ieżeli więc przecięciá *CM*, *CN*; bydź mogą tém, czém były przyſtawy równo-ległé, té przecięciá będąc cáłkiém zawiſłé od kąta *PCN*, uczą nás; że drugą ilością odmienną bydź powinién kąt *PCN*. Owóż nowy ſpoſób wyrážaniá linii krzywéy przez zrównanié, w którém kąt, i liniá pod tym kątem prowadzoná, ſą ilościami odmiennémi. Trafiliśmy iuż na ten ſpoſób ſzukaiąc zrównaniá biegunowégo w liniach *2go* porządku pod § XII. i znowu w §. poprzédzaiącym wynayduiąc liczbę śrzednic.

Zrównaniá na linie krzywe ráz przecięté od proſtéy.

Zrównanié któréby opiſywało linią krzywą tym ſpoſobem wypaśdź powinno s funkcyi ilości odmiennéy $z = CM$, i s funkcyi kąta $p = PCN$. Chcąc poznać liczbę piérwiáſtków rzetelnych w zrównaniu, czyli liczbę przecięć linii krzywéy od proſtéy, wiedzieć nám potrzeba iaká funkcya kąta wyráżá dwá, trzy, cztéry, *n* przecięć. Ale liczba przecięć iedna zależyć może od wielorakich wártości *CM*, kiedy *z* dané będzie przez zrównanié złożoné z wielu piérwiáſtków, czyli przez funkcyą wielo-kſztáłtną *z*; drugá liczba przecięć zawiſnąć może od wielorakich wártości na funkcyą kąta *p*: potrzeba nám wſzyſtkié té ſzczególności iak náydokładniéy poznać. Funkcye kąta nie mogą bydź tylko Wſtawy, Doſtawy, albo Styczné, Doſtyczné, Sieczné, Dosieczné, które ſą funkcyami Wſtáw i Doſtáw. Zeby więc iedna funkcyá kątá wyrážała wiele przecięć, potrzeba żeby iedna n.p. Wſtawa miała wielé kątow do których należy. Obrácaiąc linią *CN* około punktu *C* trafiémy prawda na wielé takich kątów przéz dorzucanié powtárzané

pół-

pół-obwodu koła P; ale tu nie idzie o wieloraką wártość odpowiadaiącą różnému położeniu i różnéy wielkości linii CN, ale o wártość odpowiadaiącą iednému tylko na każdy raz położeniu. W tym przypádku widzémy że iedna ta sama wstawa służy kątowi $PCN=p$, i kątowi $DCR=180°+p$, którégo wstawa i dostawa iest odiemná; wszystkie inné kąty maiącé tę samę wstawę i dostawę padną na té samé punkta linii krzywéy, które należą do kątów p, $180°+p$. Té iesscze dwa kąty mogą wyrážać dwie odnogi różné należącé do téy saméy linii krzywéy; albo mogą rysować dwie linie krzywe, teyże saméy natury i kształtu, s których iedna będzie położoná na stronie CP, druga na stronie CD. Piérwszy przypádek má miéysce, kiedy na wstawy lub dostawy służące kątowi p, wypadną wartości na CM, różné od wártości odpowiadaiących kątowi $180°+p$: drugi zaś przypádek, kiedy na obydwa té kąty otrzymámy té samé wártości CM, s których iedné będą dodatné, a drugié odiemné; co iesscze záleży od różnégo położeniá punktu C iako początku odcinków. Ieżeli tén punkt będzie zewnętrzny linii krzywéy iak na fig. 41. widzémy że to samo zrównanié wyrážać może linią krzywą leżącą na stronie CP, albo na stronie CD: ieżeli zaś tén punkt bedzie leżał wewnątrz; funkcye s strony CM, i s strony CR nie wypadną té samé, chyba że linie RCM, PCD, są dwie śrzednice, s których każdá dzieli linią krzywą na części równé, podobné, i iednako około siebie rosporządzoné: i w których punkt C iest śrzodkiém. Ieżeli zaś punkt C leżyć będzie na punkcie linii krzywéy, to przecięcié przy C będąc spólné wszystkim kątom nie należy do rachunku przecięć odpowiadaiących różnym pierwiástkom zrównaniá, co także trzymać náleży o przecięciach náleżących do dwóch tych samych linii krzywych. Te uwági daią nám poznać, że liczbę przecięć potrzeba nám wyciągać s funkcyi kilko-kształtnych z, do których łączyć powinniśmy uwágę ką- Fig. 41.

tów p, $180°+p$: tak iako przecięciá linii krzywéy od przyſtáw wyciągaliśmy s funkcyi y, biorąc na każdy pierwiáſtek, x dodatnie i odiemnie. Ieżeli liniá krzywá ráz tylko bydź może przeciętą od linii proſtéy, potrzeba náprzód, aby z było funkcyą iedno-kſztałtną: powtóre żeby to z było wyrażone przez funkcyą taką kąta, któraby dawſzy iedno przecięcié na kąt p, iuż innégo nie wydała na $180°+p$; chyba żeby to drugié przecięcié nie różniło ſię od piérwſzégo tylko ſamym znakiém i wprowadziło tén ſám znak w z. n.p. ieżeli $z=P$, gdzie P wyráżá pewną funkcyą kąta p; kładąc za p, $180°+p$, z ſtanie ſię $=Q$; ieżeli $Q=-P$, i z na $180°+p$ ieſt odiemném, będzie $-z=-P$, czyli $z=P$: takowá więc wártość żádnégo nowégo przecięciá nie wprowádzá. Zeby zaś P miało wſpomnioną właſność, potrzeba aby było funkcyą niepárzyſtą wſtawy p, albo doſtawy p: niech będzie $CM=z$, $CP=x$, $PM=y$, będzie $\frac{y}{z}=Wſt.p$, $\frac{x}{z}=$ $Doſt.p$: ieżeli $z=P$, ieſt zrównaniém na linią krzywą ráz tylko przeciętą od proſtéy; P bydź powinno funkcyą niepárzyſtą $\frac{y}{z}$, $\frac{x}{z}$, czyli funkcyą niepárzyſtą x, y, z, nie maiącą żádnégo wymiaru. Do téy kłaſsy náleżą linie krzywé zámknięté w zrównaniach.

$$z=\frac{ay}{z}+\frac{bx}{z}+\frac{cz}{x}+\frac{dz}{y}; \quad z=\frac{ay}{z}+\frac{bx}{z}+\frac{cz}{x}+\frac{dz}{y}$$

$$+\frac{ey^3}{z^3}+\frac{fx^3}{z^3}+\frac{gz^3}{x^3}+\frac{hy^2x}{z^3}+ \text{i t. d.}$$

czyli $1=\frac{ay}{z^2}+\frac{bx}{z^2}+\frac{c}{x}+\frac{d}{y}+$ i t. d. $\quad 1=\frac{ay}{z^2}+\frac{bx}{z^2}+\frac{c}{x}$

$$+\frac{d}{y}+\frac{ey^3}{z^4}+\frac{fx^3}{z^4}+\frac{gz^2}{x^3}+\frac{hy^2x}{z^4}+ \text{i t. d.}$$

wſzyſtkié potęgi z będąc párzyſtémi w takowych zrównaniach, ſtaną ſię funkcyami wymiernémi x, y,

położy-

położywszy $z^2=x^2+y^2$, oprócz tego cały drugi człónek tych ostatnich zrównań iest wymiaru -1, i równá się iedności, czyli ogólniéy mowiąc ilości stateczney; więc każdé zrównanié, w którém funkcyá x, y, wymiaru -1, równá iest ilości stateczney, wyrážá linią krzywą ráz tylko przeciętą od linii prostéy. Niech będzie R funkcyą wymiaru n, S funkcyą wymiaru $n+1$, a ilością stateczną; wszystkié linie krzywé ráz przecięté od prostéy zamknięté są w zrównaniu ogólném - - $\frac{R}{S}=a$, aže $\frac{S}{R}=\frac{1}{a}$, gdzie $\frac{1}{a}$ iest ieszcze ilością stateczną, którą wyrazić możémy przez α, więc ieszcze zrównaniá w których funkcya x, y, wymiaru piérwszégo iest równá ilości statecznéy, opisuią linią krzywą ráz przeciętą od prostéy. Wszystkié takowé linie krzywé wyrážaią się zrównaniém ogólném - - $\frac{S}{R}=\alpha$ - - czyli $S=\alpha R$, czyli

$$ax^{n+1}+bx^ny+cx^{n-1}y^2+dx^{n-2}y^3+ex^{n-3}y^4+ \text{ i t. d.}$$
$$=\alpha(Ax^n+Bx^{n-1}y+Cx^{n-2}y^2+Dx^{n-3}y^3+ \text{ i t. d.}) \quad (M).$$

Do tego więc rodzaiu nálcży náprzód liniá prostá, na którą $n=0$: powtóré linie 2*go* porządku na któré $n=1$: ale w tych liniach punkt C na fig. 41 leżyć musi na saméy linii krzywéy, a przéto w rachunek przecięciá nie wchodzi iako spólny wszystkim kątom. Potrzecie linie 3*go* porządku gdzie $n=2$: ale punkt C leżyć musi na punkcie dwoistym i t.d. Linie więc 3*go* porządku maiącé tylko w swém zrównaniu iedén piérwiástek rzetelny, terminy zaś náywyższégo wymiaru w x, y; oprócz tego linie 3*go* porządku dwa razy przecinané od linii prostéy, byleby punkt C leżał na punkcie linii krzywéy; linie ieszcze krzywé 3*go* porządku maiącé punkt dwoisty, byleby w tym punkcie znáydowało się C, uczynią zadosyć zrównaniu (M). Podobnym sposobém rozumować można o liniach porządków wyższych. Fig. 41.

Wystáwmy sobie teráz że liniá CM na fig. 41 przeciná

Zrównaniá na linie krzywé dwa razy przecięté od proftéy.

ciná we dwóch punktach linią krzywą, a przeto że ta liniá krzywá wyráżá fię zrównaniém

$z^2 - Pz + Q = 0$ - - $z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{P^2 - 4Q}{4})}$, gdzie P, Q, fą funkcyami kąta p. Zeby wprowadzonému warunkowi zadofyć fię ftało, potrzeba żcby każdy z dwóch piérwiáftków na z, iedno tylko przecięcie wydał, a przeto trzeba żeby kątowi $180° + p$ iuż żádná infzá nie odpowiadała wártość na z: czego nie możná inaczéy otrzymać tylko ieżeli P ieft funkcyą niepárzyftą, Q zaś funkcyą párzyftą wftawy lub doftawy kąta p, czyli P funkcyą niepárzyftą $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$; Q zaś funkcyą párzyftą tychże ilości. Aże podané zrównanié na linią krzywą wyrazić fię może $1 - \frac{P}{z} + \frac{Q}{zz} = 0$; niech będzie R funkcyą wymiaru n, S funkcyą wymiaru $n+1$, T funkcyą wymiaru $n+2$; poniéwáż $\frac{P}{z}$ ieft wymiaru -1, wyrazić ié możémy przez $\frac{S}{T}$, tak dalece że $\frac{P}{z} = \frac{S}{T}$; $\frac{Q}{z^2}$ poniéwáż ieft wymiaru -2, będzie $\frac{Q}{z^2} = \frac{R}{T}$, i zrównanié ogólné na linie krzywé dwa razy przecięté od proftéy ieft - - $1 - \frac{S}{T} + \frac{R}{T} = 0$, czyli $T - S + R = 0$. tu znowu należyć mogą linie krzywé ze wfzyftkich porządków czyniąc $n = 0$ na drugi, $n = 1$ na trzeci, $n = 2$ na czwárty porządek i t. d. i biorąc za T terminy wymiaru $n+2$ dodatnie, za S terminy wymiaru $n+1$ odiemnie, za R terminy wymiaru n znowu dodatnie podług zrównaniá - - $T - S + R = 0$, w porządku więc trzecim termin zawiéraiący

raiący ilości ftateczné nie wniydzie, w porządku *4tym* terminy wymiaru piérwfzego, ani termin ftateczny; w porządku *5tym* terminy wymiaru *2go*, *1go* ani termin ftateczny nie będą wchodzić w oznaczenié takowych linii krzywych: co podobnie łatwo ieft rościągnąć do porządków wyżfzych. Kondycyi więc założonéy uczynią zadofyć linie *2go* porządku, wyftawiwfzy fobie iedno przecięcié w odległości niefkończonéy, kiedy w Hyperboli liniá proftá przecinaiąca ftanie fię ledwo-nieftycznéy, w Paraboli zaś osi równo-ległą. Linie z *3go* porządku uczynią także zadofyć, położywfzy punkt *C* na punkcié linii krzywéy; z *4go* porządku linie maiącé punkt dwoifty, w którym znaydować fię będzie *C*: zgoła linie s porządku *n* będą mogły uczynić zadofyć zrównaniu $T—S+R=o$, ieżeli będą miéć punkt tyle-krotny, ile $n—2$ zamyká iedności, i ieżeli w takowym punkcie znaydować fię będzie *C*. Gdybyśmy ieszcze mieli uwágę na piérwiáftki uroioné zrównáń, znaleźlibyśmy iefzcze w wyżfzych porządkach wielé linii krzywych nie maiących takiégo punktu, iakiégo wyciągámy, a iednak zadofyć czyniących zrównaniu i warunkowi założonému.

Nim poftąpiémy daléy rozwiążmy tu fobie naftępuiącé zadanié. Wynaleśdź zrównanié na wfzyftkié linie krzywé, któré tak fą p.zeciętè we dwóch miéyfcach *M, N*, od linii proftéy, iż cięciwa *MN*, czyli różnica dwóch przecięć *CN—CM*, ieft zawfze ilością ftateczną. Ponieważ linie krzywé dwa razy przeciętė od proftéy, zawiéraią fię wfzyftkié w zrównaniu - - $z^2—Pz+Q=o$, s którégo potém to ogólné powftało $T—S+R=o$, ieft więc $CM+CN=P$, $CM.CN=Q$, aże $[CN—CM]^2=(CN+CM)^2—4CM.CN=P^2—4Q$, podług kondycyi więc zadaniá ieft $CN—CM=\sqrt{(P^2—4Q)}=a$, gdzie *a* wyráżá ilość ftateczną - - $P^2—4Q=a^2$ - - (α). chcąc tę kondycyą w zrównaniu (α) zawartą wprowadzić w $T—S+R=o$, przypomniéymy fobie że $\frac{P}{z}$ — Liniá krzywá Mufzlowá. Fig. 41.

$\frac{P}{z}=\frac{S}{T}$, $\frac{Q}{z^2}=\frac{R}{T}$, czyli $P=\frac{Sz}{T}$, $Q=\frac{Rz^2}{T}$, włożywszy té wártości za P, Q, w (α), wypadnie

$$\frac{S^2z^2}{T^2}-\frac{4Rz^2}{T}=a^2, \text{ skąd } R=\frac{S^2}{4T}-\frac{a^2T}{4z^2}$$

włożywszy znowu tę wártość na R w zrównanié $T-S+R=o$, odmiéni się na $T-S+\frac{S^2}{4T}-\frac{a^2T}{4z^2}=o$,

czyli na - - $z^2(2T-S)^2=a^2T^2$ - - (β).

(β) ieſt zrównaniém na wſzyſtkié linie krzywé tę właſność maiącé, że $CN-CM=a$, i dwa razy tylko przecięté od proſtéy: ponieważ T ieſt wymiaru $n+2$, S wymiaru $n+1$; porządek czwárty ieſt náyniżſzym porządkiém zawiéraiącym linie ciągłé tą właſnością znakomité. W nim $n+1=o$, a przeto T ieſt wymiaru 1go, S ilością ſtateczną: położmy $T=x$, $S=2b$, zrównanié (β), będzie 4go porządku:

$$a^2x^2=(x^2+y^2)(2x-2b)^2 \quad - - - \quad (A).$$

aże $\frac{x}{z}=Doſt.p$, $\frac{y}{z}=Wſt.p$, będzie $x=zDoſt.p$, $y=zWſt.p$, Przez użycié tych wártości na x, y; (A) ſtanie się

$$a^2z^2Doſt.p^2=z^2(2zDoſt.p-2b)^2, \text{ czyli}$$

$$z=\frac{b}{Doſt.p}\pm a \quad . \quad . \quad . \quad (A').$$

Fig. 42. zrównanié (A') złożemy naſtępuiącym ſpoſobém; wziąwſzy na fig. 42. linią przecinaiącą CN, któréy dwa punkta M, N, leżą na linii krzywéy, od C prowadzę CB czyniącą z CN kąt $BCN=p$, potém prowadzę GH pionową do CB, i nazywám $CD=b$, $DA=DB=a$, będzie $CL=\frac{b}{Doſt.p}$, a ponieważ $LM=LN=a$, będzie $CM=\frac{b}{Doſt.p}-a$, $CN=\frac{b}{Doſt.p}+a$,

CN—

$CN-CM=2a$, czyli równé ilości ſtateczné́y. Liniá więc krzywá maiącá dwie odnogi nieſkończoné XBZ, $X'AZ'$, i ledwo-nieſtyczną proſtą GH, wyraża ſię zrównanié́m (A'), albo (A); Dawni ieſzcze Geometrowie uważali własności té́y linii krzywé́y, którą nazwali **Linią Muszlową** *(Conchois)* złożoną z dwóch części podobnych: odnogę XBZ nazywali **Muszlową zewnętrzną** *(Conchois exterior)*, odnogę zaś $X'AZ'$ **Muszlową wewnętrzną** *(Conchois interior)*, ié́y bowié́m ryſunek podobny ieſt do konchy. Chcąc od zrównaniá (A') przyiśdź do (A), biorę CB za oś, C za początek odcinków, od N ſpuſzczám pionową NP, będzie $CP=x$, $PN=y$, $CD=b$, a z warunku pytaniá $NM=a$, tróykąty podobné CPN, NLF, daią mi naſtępuiącą proporcyą:

$CP:CN::NF:LN$ - - czyli $x:\sqrt{(x^2+y^2)}::x-b:\frac{1}{2}a::2x-2b:a$
$ax=(2x-2b)\sqrt{(x^2+y^2)}$, a zniósſzy znak pierwiáſtkowy, $a^2x^2=(x^2+y^2)(2x-2b)^2$; $y^2=\frac{a^2x^2}{(2x-2b)^2}-x^2$, kiedy $x=b$, $y=\frac{1}{0}$, i liniá krzywá zamieniá ſię na ledwo-nieſtyczną.

Ieżeli liniá krzywá má bydź trzy razy przeciętą od proſté́y, powinná náprzód bydź wyrażoná zrównanié́m $z^3-P'z^2+Q'z-R'=0$, poniewáż na każdą wártość z, iedno tylko powinno wypádać przecięcié, a przeto kąt $180°+p$ powinien nie wydadź innégo iak kąt p: dlá ocaleniá tego warunku, P' iako ſumma; R' iako mnogość wſzyſtkich pierwiáſtków bydź powinny funkcyami niepárzyſté́mi wſtawy lub doſtawy kąta p: Q' zaś iako mnogość z dwóch naráz pierwiáſtków, bydź powinno funkcyą párzyſtą téyże wſtawy lub doſtawy kąta. Chcąc té kondycyé rościągnąć do iakichkolwiek porządków linii, zrównanié podané wyſtawiám ſobie pod wzoré́m - - *Zrównanié na trzy przecięcia linii krzywé́y od proſté́y.*

$1-\frac{P'}{z}+\frac{Q'}{z^2}-\frac{R'}{z^3}=0$, gdzie $\frac{P'}{z}$ ieſt wymiaru -1; $\frac{Q'}{z^2}$

wymiaru -2; $\frac{R'}{z^3}$ wymiaru -3; niech teráz T będzie wymiaru $n+3$; S wymiaru $n+2$, R wymiaru $n+1$, nakoniec Q wymiaru n; będzie - - $\frac{P'}{z}=\frac{S}{T}$, $\frac{Q'}{z^2}=\frac{R}{T}$, $\frac{R'}{z^3}=\frac{Q}{T}$, i zrównanié podané zamiéniá ſię na to ogólné:

$$1-\frac{S}{T}+\frac{R}{T}-\frac{Q}{T}=0, \text{ czyli } T-S+R-Q=0.$$

linie więc s porządku 3go mogą uczynić zadoſyć tému zrównaniu, wziąwſzy punkt C zewnątrz linii krzywéy: linie z 4go porządku także, byleby punkt C leżał na linii krzywéy: linie z porządku 5go maiącé punkt dwoiſty uczynią także zadoſyć, byleby w tym dwoiſtym punkcie znaydowało ſię C, i ogólnie linie porządku n, maiąc punkt mnogości $n-3$, i w tym punkcie $n-3$ oſadziwſzy C. S tych uwág łatwo nám ieſt teraźniéyſzą teoryą rościągnąć do linii przeciętych cztery, pięć, n razy od linii proſtéy. Gdybyśmy taki ſpoſób obrali byli do wyrážaniá natury linii krzywéy, widzémy oczywiście; że podział linii krzywych cale wypádá róžny od tégo, któryśmy przyięli. Łatwo nám ieſt atoli linią iakąkolwiek krzywą wyrażoną przez wſpół-uſzykowané x, y, przywieśdź do wyrazu, gdzie funkcyá kąta wchodzi za ilość odmienną. Tén ſpoſób uważaniá i wyrážaniá linii krzywych wiele nám poſłuży w Mechanice i Aſtronomii.

§. XXVI.

Przecięciá linii krzywéy od proſtéy maiąc dwa zrównaniá.

Zoſtał nám ieſzcze iedén przypádek do roſtrząſaniá, kiedy liniá proſtá przecinaiąc krzywą, ieſt wyrażoná ſwém właściwém zrównaniém: na tén czás mámy dwa zrównaniá, iedno na linią proſtą $ay+bx-c=0$, drugié na linią krzywą $Ay^m+By^{m-1}x+Cy^{m-2}x^2+Dy^{m-3}x^3+$ i t. d. $+ A'y^{m-1}+B'y^{m-2}x+C'y^{m-3}x^3+$ i t.d. $+ A''y^{m-2}+B''y^{m-3}x+$ i t. d. - - +

$+ \alpha y + \beta x + \gamma = 0$. gdzie m ieſt liczbą taką, do iakiégo porządku náleży liniá krzywá. Chcąc w tym przypadku roſtrząſać przecięciá linii krzywéy od proſtéy, rzućmy okiém na fig. 43. Każdá s tych dwóch linii má ſwoié wſpół-uſzykowané, które odnoſząc do iednéy teyże ſaméy osi *AS*, widzémy, że w punkcie przecięciá przyſtawa linii proſtéy równą ieſt przyſtawie náleżącéy do linii krzywéy, czyli że *PM*, *P'M'*, ſą ſpólné obydwóm liniom: więc wyciągnąwſzy wártość na y z zrównaniá na iednę s tych linii, i tę wártość włożywſzy w zrównanié na drugą linią; otrzymámy zrównanié na ſamo x, które wyrážać będzie odcinki *AP*, *AP'* znowu ſpólné i náleżącé do przyſtáw ſpólnych *PM*, *P'M'*. Liczba takowych odcinków zależy od liczby piérwiáſtków rzetelnych w zrównaniu na ſamo x, i ta liczba nauczy nás zaráz w wielu punktach liniá krzywá ieſt przeciętą od proſtéy. Zaiſte zrównanié na linią proſtą nie mogąc dadź żadnégo przecięciá niepodobnégo, wyráżá nám wſzyſtkié przyſtawy rzetelné; té przyſtawy wprowádzaiąc w zrównanié na linią krzywą nadaiémy pewné wártości y, które ieżeli ſą zgodné z związkiém ilości w zrównaniu zawartym, wydadź powinny x rzetelné; ieżeli zaś nie ſą, x wypaśdź powinno uroioné, pokazuiąc że liniá krzywá nie má żádnych wſpół-uſzykowanych ſpólnych z linią proſtą. Aże przez tę ſztukę nic innégo nie czyniémy, tylko za pomocą dwóch zrównań między dwiema ilościami odmiennémi x, y, wyrzucámy iednę, i przerábiámy dwa zrównaniá na iedno oznaczoné, gdzie ſamo x, albo ſamo y ieſt funkcyą ilości ſtatecznych i znanych; więc wyrzucać ilość odmienną za pomocą dwóch zrównań, czyli przerábiać dwa zrównaniá nieoznaczoné na iedno oznaczoné, ieſt to ſzukać przecięć dwóch linii témi zrównaniami wyrażonych, odnoſząc wſpół-uſzykowané obydwóch tych linii do iednéy osi i do tegóż ſamégo początku odcinków. Skąd widzémy znaczenié eliminacyi wyłożonéy w §. 26. Algebry ſtóſuiąc ią do Geometryi: powtóre: że to Fig. 43.

K5 cośmy

cośmy dopiero mówili o linii prostey i krzywey, rościągą się do iakichkolwiek dwóch linii krzywych.

Przecięcie linii krzywych od innych krzywych.

Maiąc zrównania na dwie linie krzywe $A=o$, $B=o$; i przerobiwszy ie przez wyrzucenie y, na zrównanie oznaczone $C=o$, gdzie C iest funkcyą x i ilości stałecznych; to ostatnie zrównanie albo będzie zamykać wszystkie pierwiastki rzetelne, albo rzetelne zmięszane z uroionemi. Ieżeli $C=o$ zamyka wszystkie pierwiastki rzetelne; żeby każdy z nich wyrażał przecięcie linii krzywey od drugiey, potrzeba aby takiemu pierwiastkowi odpowiadała wartość na y rzetelna w $A=o$, i równa wartości rzetelney drugiego zrównania $B=o$; ponieważ w tem przecięciu przystawy obydwóch linii krzywych są równe. Aże bydź może, że wartość na x rzetelna wyciągniona z $C=o$, uczyni y uroionem w $A=o$, albo w $B=o$; oprócz tego może się przytrafić, że x rzetelne wypadaiące z $C=o$, nie wyda wartości na y równych w obydwóch zrównaniach $A=o$, $B=o$; bo wiemy s teoryi eliminacyi §§. 9. 26. Algeb. że w ostatnie zrównanie $C=o$ wkrada się mnożnik zbytni nie należący ani do $A=o$, ani do $B=o$; więc pierwiastki nawet rzetelne zrównania $C=o$, nie zawsze wyrażaią prawdziwe przecięcia dwóch linii krzywych. Zeby się o takowych przecięciach przekonać, potrzebaby każdey wartości na x, wydobytey z zrównania $C=o$ doświadczać, czyli ta nie uczyni y uroionem w $A=o$, albo w $B=o$; co tem iest trudnieysze do wykonania, im zrównania $A=o$, $B=o$, są wyższych stopni. Oprócz tego potrzeba nam bydź pewnemi, że każdy pierwiastek rzetelny $C=o$, daie równe wartości na y w obydwóch zrównaniach $A=o$, $B=o$: tym trudnościom zarądza się następuiącym sposobem: ieżeli wyrzucaiąc y z $A=o$, $B=o$, trafiamy w tem działaniu na zrównanie zamykaiące y w pierwszym stopniu wzoru $y=X$, gdzie X iest funkcyą x i ilości stałecznych; takowe zrównanie pokazuie, że wartości rzetelne x zrównania $C=o$ wyrażaią prawdziwe

wdziwé przecięciá: n.p. gdybyśmy mieli dwa zrównaniá na linie krzywé - - $y^2+Dyx+E=o$, - - - - $y^2+Fxy+G=o$, wyrzucaiąc y trafilibyśmy náprzód na zrównanié (α) - - $y=\frac{G-E}{x(D-F)}$; gdzie G, E, ſą funkcyami x; tę dopiéro wártość na y włożywſzy w iedno z zrównáń podanych, otrzymalibyśmy nowé zrównanié na ſamo x. Zrównanié (α) wypadło s kombinacyi dwóch podanych zrównáń $A=o$, $B=o$, więc muſi miéć w ſobie coś ſpólnégo obydwóm podług §. 26. Algeb. Ta ſpólná właſność ieſt w wártości na y, która nie może ſię na żadné x rzetelné ſtać uroioną; więc zrównanié (α) uczy nás, że wſzyſtkié wártości na x rzetelné, ieżeli daią y rzetelné w zrównaniu $A=o$, dadzą ié także w zrównaniu $B=o$, i że té wártości rzetelné y w obydwóch zrównaniach będą równé; ponieważ zrównanié (α) na każdé x nie daie tylko iednę wártość y, ſpólną obydwóm zrównaniom $A=o$, $B=o$. Skąd ſię wnoſi, że ilé razy dwa zrównaniá podané na linie krzywé przyprowadzą nás do takiégo, iakiém ieſt (α) w eliminacyi; wſzyſtkié wártości rzetelné na x wyciągnioné z $C=o$, wyrážać będą przecięciá linii krzywych. Ale zrównanié (α) byłoby nie wypadło, gdyby podané $A=o$, $B=o$, zamykały ſamé potęgi párzyſté y, to ieſt: gdyby śrzednica linii krzywych była wziętą za oś; więc chcąc bydź pewnym że wſzyſtkié wártości rzetelné na x zrównaniá $C=o$, wyrážaią przecięcié, śrzednica nie powinna bydź osią. Oprócz tego nie zapomináymy, że zrównanié (α) może bydź takié, iż przywiódſzy ié do zero, będziemy ié mogli rozebrać na inné prościéyſze, iako to $(y-ax)(b+cx)(d-ex)=o$, gdzié $y-ax=o$ dá nám przecięciá: inné zaś $b+cx=o$ $d-ex=o$, mogą ich nie dadź uczyniwſzy y uroionem w $A=o$, albo w $B=o$; w takowym przypádku potrzeba nám wſzyſtkié proſté zrównaniá zamknięté

 w (α)

w (α) poczynić zero, s każdego wydobytą wártość na x, kłaśdź w iedno z zrównáń podanych $A=o$, $B=o$: ieżeli y na taką wártość wypadnie uroionem, pokáże nám przecięcie niepodobne. Skąd znowu rodzi się trudność náprzód w rozbiéraniu (α) na swoie mnożniki: powtóre w doświádczaniu każdego s tych mnożników czyli mu służy przecięcie podobne lub niepodobne? Trudność ta upadłaby, gdyby (α) nie mogło się na takie mnożniki rozbiérać, to iest, gdyby wyrażało iednę linią krzywą ciągłą przeciętą raz tylko od przystawy, nie zaś zbiór linii prostych lub krzywych prościeyszych. Więc żeby eliminacyá prowadzić nás mogła do prawdziwych przecięć linii krzywych, to iest żeby zrównanie oznaczone $C=o$, wypadaiące z dwóch nieoznáczonych $A=o$, $B=o$, przez swoie piérwiástki rzetelne wyrażało zawsze przystawy spólne dwom liniom krzywym; potrzeba aby iedno s tych nieoznaczonych zrównáń na linią krzywą ciągłą n.p. $A=o$, było wzoru $P+Qy=o$: gdzie P, Q, prócz ilości státecznych zamykaią x w iakimkolwiek stopniu, a przeto zrównanie $P+Qy=o$ wyráża linią krzywą iakiegokolwiek porządku raz tylko przeciętą od przystawy; drugie zaś zrównanie $B=o$ zamykać może y w iakimkolwiek wymiarze, a przeto wyrażáć linią krzywą ilekolwiek razy przeciętą od przystawy. Tym sposobem wydobytá wártość z $A=o$ na $y=\frac{-P}{Q}$, i włożoná w $B=o$, zrodzi zrównanie na sámo x $C=o$, którégo wszystkie piérwiástki rzetelne wyrażać będą prawdziwe przecięciá dwóch linii krzywych. Gdzie ieszcze mámy i tę korzyść, że zrównanie $y=\frac{-P}{Q}$ służy nám do upewnieniá się, która wártość zrównaniá na x, do któréy przystawy należy. Zaiste wystáwmy sobie że $C=o$ ma dwa piérwiastki rzetelne oznáczaiące na fig. 45. dwa przecięciá M, N; każdy s takowych piérwiastków

Fig. 45.

n.p.

n.p. $x=a$, nie wiémy ieszcze czyli ieſt AP, czyli AQ, a przeto czyli należy do przecięciá N, czyli do M: maiąc zaś zrównanié $y=\frac{-P}{Q}$, i w nié każdą s takowych wártości na x kładąc, otrzymámy na y pewnéy wielkości wártość; ieżeli to $y=+PM$, na $x=a$; náleży do przecięciá M: ieżeli na x wypadną dwie wártości równé, z $C=o$; pokážą nám, że tam dwa punkta zeszły się razem, czyli że ieſt punkt dwoiſty, a zrównanié $y=\frac{-P}{Q}$ pokáże nám miéysce tego dwoiſtégo punktu.

Do wynalezieniá przecięć linii krzywych iakiégokolwiek porządku nie zoſtaie nám iuż tylko z dwóch zrównáń podanych n.p. $P+Qy=o$, - - (A) $y^m+Ay^{m-1}+By^{m-2}$ - - $+V=o$ - - (B). gdzie P, Q, A, B, C, i t.d. są funkcyami x, i ilości ſtatecznych; wyrzuciwszy y za pomocą prawideł §. 26. Algeb: wynaleśdź trzecié $x^n+A'x^{n-1}+B'x^{n-2}+C'x^{n-3}+$ i t. d. $+V'=o$ - - (C) oznaczoné; gdzie A', B', C', D', i t. d. są funkcyami ilości znanych i ſtatecznych. To oſtatnié zrównanié rozwiązawszy, wypadnié nám tyle odcinków AP, AP', AP'', i t. d. ilé x má wártości rzetelnych: té pokážą liczbę punktów, w których liniá krzywá - - $P+Qy=o$, przeciná drugą $y^m+Ay^{m-1}+By^{m-2}+$ i t. d. $+V=o$. Każdy więc pierwiaſtek rzetelny zrównaniá (C) będzie dany przez linią proſtą: i ieżeli dwie linie krzywé nie maią śrzednicy wziętéy za oś, ſtopień zrównaniá (C) będzie miáł za wykładnika liczbę powſtaiącą z rozmnożeniá wykładników náywyższych zrównaniá (A), i (B), ale ieszcze dodadź náleży kondycyą, że (C) ieſt oswobodzoné od mnożników obcych, któréby się mogły przymięszać w działaniu.

§. XXVII.

Widzieliśmy dopiéro, że z dwóch zrównáń nieoznaczonych na linie krzywé wynaleśdź można trzecié

ozna-

Użycie przecięć linii krzywych do poznaniá składni zrównáń.

oznaczoné, którégo piérwiáftki rzetelné wyrážaią odcinki prowadzoné do przecięć linii krzywych. Więc każdé zrównanié oznaczoné $ax^m+bx^{m-1}+dx^{m-2}+ex^{m-3}+$ i t.d. - - $+k=o$ - - (C). w któré m a, b, c, d, i t. d. fą ilościami znanémi, uwážać možná iako powftaiącé z dwóch nieoznaczonych przez wyrzucenié y, i iako miéć mogącé piérwiáftki rzetelné wyrażoné przez linie proftć. Wynaleśdź dwa nieoznaczoné zrównaniá takié, z iakichby przez eliminacyą wypaśdź mogło (C), ieft to wynaleśdź dwie linie profté lub krzywé przecinaiącé fię, maiącé oś fpólną i początek odcinków, a oráz fpólné odcinki náleżącé do przecięć; a przeto ieft to wynaleśdź piérwiáftki zrównaniá (C) przez linie. Spofób ten rozwiązaniá zrównáń za pomocą linii proftych lub krzywych nazywá fię SKŁADNIĄ ZRÓWNÁN (*Conftructio Aequationum*). *Złożyć* bowiém *zrównanié*, znaczy w Geometryi odryfować linią proftą lub krzywą, w któréy związek wfpół-ufzykowanych rodzi zrównanié podané, i to znaczenie náleży do zrównáń nieoznaczonych: *złożyć* zaś *zrównanié oznaczoné*, ieft to odryfować dwie linie przecinaiącé fię tylé razy, i w taki fpofób, aby odcinki do przecięć náleżące wyrážały wfzyftkié piérwiáftki rzetelné zrównaniá podanégo. Co nám nie będzie trudno wykonać i zrozumiéć w przykładach. A naprzód każdé zrównanié oznaczoné piérwfzégo ftopnia $Ax-B=o$, uważać fię może, iakoby powftało z dwóch nieoznaczonych $ay=c(x+a)$ (1). - - $by=d(b-x)$ - - (2), s których wyrzuciwfzy y, wypadnie $x=\frac{(d-c)ab}{bc+da}$ - - (3), któré ieft wzoru $Ax-B=o$: żeby więc znaleśdź wártość na x wyrażoną przez linie, potrzeba złożyć zrównaniá (1), (2), s których powftało (3). Aże zrównanié nieoznaczoné (1), (2) każdé z ofobna rozebrać fię może na cztéry proporcyonalné terminy, któré możemy dobrze wyrazić przez 4 linie proporcyonalné zawarté w dwóch tróykątach podobnych; przeto nazwáwfzy na fig. 44.

Fig. 44.

$AB=a$,

$AB=a$, $AD=c$, $AP=x$, $PM=y$, $CA=b$, $AE=d$, mámy náprzód $AB:AD::BP:PM$, czyli $a:c=a+x:y$ - - - $ay=c(a+x)$, więc zrównanie (1) ieſt na linią BS; powtóre, $CA:AE::CP:PM$ to ieſt $b:d=b-x:y$; - - - $by=d(b-x)$ zrównanié na linią CE: przeto piérwiáſtek zrównaniá (3) ieſt AP, náleżący do przecięciá ſpólnégo M obydwóch linii proſtych. Wſzyſtkié zatém zrównaniá oznaczoné piérwſzégo ſtopnia złożyć ſię mogą przez dwie linie proſté.

Zrównanié náyoglniéyſzé 2go ſtopnia $Ax^2+Bx+C=o$, ponieważ uwáżać ſię może iako wypadłé z dwóch zrównáń nieoznaczonych $ay=c(a+x)$, $y^2+a'xy+b'x^2+d'x+e'y+f=o$, s których drugié wyrážaiąc linią krzywą drugiégo porządku, uczy nás; że do złożeniá zrównáń oznaczonych 2go ſtopnia potrzeba użyć linii proſtéy, i linii któréykolwiek 2go porządku. Iakóż liniá 2go porządku mogąc bydź przeciętá we dwóch miéyſcach od linii proſtéy, okázać powinna w tych przecięciach dwa piérwiáſtki zrównaniá podanego $Ax^2+Bx+C=o$. Użyimy do tego koła iako linii krzywéy náyłatwiéyſzéy do ryſunku, na którą zrównanié $d^2=(x-f)^2+(y-g)^2$; z dwóch tych zrównáń na linią proſtą i na koło wyrzuciwſzy y, wypadnie zrównanié oznaczoné:

$$(a^2+c^2)x^2+(2c^2a-2fa^2-2acg)x+a^2f^2-2ca^2g+a^2g^2+a^2c^2=o \quad - \quad - \quad - \quad (C').$$

porównáwſzy to zrównanié s podaném co do wſpółczynników A, B, C, i wprowadziwſzy ieſzcze kondycye na oznaczenie innych ilości znanych w zrównaniach na linią krzywą i na koło, czyli raczéy na wyrażenie a, c, f, g, d, przez A, B, C; przyidziémy do naznaczeniá dwóch náyogólniéyſzych zrównáń ná linią proſtą i na koło, któré uwážać możémy iako mogącé wydadź s ſiebie każdé iakiékolwiek zrównanié 2go ſtopnia oznaczoné $Ax^2+Bx+C=o$: nie zoſtaie nám więc tylko złożyć dwa zrownaniá - - -

$$ay=c(a+x), \quad - - (A) \quad - - \quad d^2=(x-f)^2+(y-g)^2 \quad - - (B)$$

tego dokażemy na figurze 45. nazwawſzy $AR=a$, $AB=c$, Fig. 45.

$AB=c$, $AD=f$, $CD=g$, $CM=d$, $AP=x$, $PM=y$, $LM=y-g$, $LC=x-f$, mamy naprzód $AR:AB::RP:PM$ $a:c=a+x:y$ - - $ay=c(a+x)$ - - $CM^2=LC^2+LM^2$ - - $d^2=(x-f)^2+(y-g)^2$; zrównanie więc (β) ieſt na koło promienia $CM=d$, zrównanie zaś (α) na linią proſtą *RM* przecinaiącą koło w dwóch mieyſcach *N*, *M*, przeto *AQ*, *AP*, ſą prawdziwemi pierwiaſtkami zrównaniá (*C'*). Podobnym ſpoſobem złożyćby można zrównanie *3go* ſtopnia za pomocą linii proſtey z linią krzywą *3go* porządku, którą proſta w trzech punktach przecina: zrównanie *4go* ſtopnia za pomocą dwóch linii *2go* porządku iakie ſą nayprościeyſze koło i Parabola, które ſię w czterech punktach mogą przecinać: zgoła za pomocą dwóch linii krzywych porządków, *m*, *n*, można złożyć zrównanie ſtopnia *mn*.

Spoſób takowy rozwięzywaniá zrównáń za pomocą linii krzywych, użyty od Des-Carta był ledwo nie powſzechnym, póki Geometrowie nie rozſzerzyli granic Algebry i nie wprowadzili użyciá Tablic Trygonometrycznych. Za pomocą niego Des-Cartes rozwiązáł zaraz wielkie owo w ſtarożytności zadanie o dwóch śrzednich proporcyonalnych liniach: i innych wiele w ſwoiey Geometryi o naturze linii krzywych. Dawni Geometrowie nie mieli innego ſpoſobu uważaniá linii krzywych tylko przez takowe przecięciá, które w niedoſtatku rachunku Algebraicznego wyrážali przez ſame proporcye barzo zawikłane; a chcąc przeniknąć w zawikleyſze linii krzywych właſności, powynaydowali do tego linie krzywe wyżſzych porządków: tak Nicomedes wynalázł linią Muſzlową §. 25: Diokles, Ciſsoidę §. 23. iako widzieć można Pappum. Colle. Math. Lib. III. Des-Cartes wynalázłſzy ſpoſób wyrážaniá linii krzywych przez rachunek, wſzyſtkie te dawnych zadaniá barzo ſzczęśliwie rozwiązáł. Poſzedł za nim Newton w ſwoiey Arytmetyce powſzechney, i wiele ſkładni zró-

zrównáń w Des-Carcie uprościł, innych wiele przydał. Nie można nie wyznać że ſpoſób rozwięzywaniá zrównáń przez linie krzywé ieſt barzo dowcipny, i wprawiaiący w rozumowanié; ale do użyciá cale trudny. Wyciągá bowiem práwdziwie geometrycznégo ryſunku linii krzywych, w którym chybiwſzy, błądzemy wiele w wártościach ſamych pierwiáſtków. Ryſowáć zaś linie krzywé wyżſzych oſobliwie porządków geometrycznie przez punkta, ieſt rzeczą niezmiernie zmudną i zawikłaną, iako każdy ſ pierwſzéy uwági może ſię przekonáć. Dlá tey ci to przyczyny ſkładnia zrównáń przez linie krzywé ieſt cale zaniedbaná w dziſieyſzym Matematyki ſtanie, którąśmy tu krotko wyłożyli, aby ieſzcze zoſtawić ślad pierwſzégo Geometryi ſtanu w ſtarożytności, i za czaſów Des-Carta. Ktoby iednak dokładnieyſzéy chciał w tém wiadomości, odſyłamy go do dzieł Des-Carta: Marquis de l' Hopital: *Traité Analytique des Sections Coniques-Livre IX,X.*

ROZDZIAŁ PIĄTY.

Zrównaniá między TRZEMA ODMIENNEMI ILOŚCIAMI tłómaczą ſię przez POWIERZCHNIE CIAŁ, i przez linie proſté lub krzywé na powierzchniach leżącé: podaie ſię ſpoſób wyrázániá różnych powierzchni krzywych, i linii na wielu płaſzczyznach zoſtaiących.

§. XXVIII.

Zrównaniá nie oznaczoné między trzema odmiennémi ilościami tłómaczą ſię na linie

Wſzyſtkié własności linii krzywych, ktoré nás dotąd zaprzątały, wydobyté ſą z uwági nad zrównaniami nieoznaczonémi między dwiéma odmiennémi ilościami: skąd nám ieſt łatwo uczuć, iak teorya takowych zrównáń ieſt rozległá i obfita, gdzie

rozum ludzki zostawił nayszczęśliwsze pamiątki swoiey dzielności, i gdzie zawsze niewyczerpane zrzodło nowych prawd znayduie. Pamiętaymy tylko, żeśmy dopiero ieden rodzay zrównań nieoznaczonych potrafili przetłómaczyć na linie, to iest kiedy zrównanie dwie tylko odmienne ilości zamyka. Wszakże iednak zrównanie Algebraiczne zawierać może *n* ilości odmiennych, s których chcąc na iednę mieć wartość oznaczoną i pewną, potrzeba nám wprowadzić *n*—*1* warunków dlá nadaniá wártości tyluż niewiadomym: Coż więc znaczyć będą zrównaniá trzy odmienne ilości zawieraiące następuiąc zaráz po tych, s których Teoryá linii krzywych wypadła? Wystáwmy sobie z nich iedno nayprościeysze $Ax+By+Cz+D=o$: w niem każdá ilość odmienná iest funkcyą dwóch innych, więc naprzód chcąc takowe zrównanie przez linie wytłómaczyć, potrzeba nám trzech współ-uszykowanych: każdey s tych współ-uszykowanych oddzielić potrzeba dwie strony, iednę na wártości dodatne, na wartości odiemne drugą; a przeto całe mieysce na którémby leżała liniá takowém zrównaniém opisaná, rościąć na sześć części od siebie różnych i oddzielnych. Tego dokázać nie potrafiémy na iedney płaszczyznie, bo tey wszystkie wymiary dwie współ-uszykowane swém położeniém zabrały: odcinki bowiem *x* zabrały całą szérokość; przystawy *y* całą długość płaszczyzny na którey liniá krzywá leżała: więc trzecia ilość odmienná *z* mieć powinna wymiár trzeci, czyli głębokość: a zatém ogólnie mowiąc: zrównanie nieoznaczone między trzema odmiennémi, ilościami nie może wyrážać tylko albo płaszczyznę odnoszoną do drugiey płaszczyzny, albo powierzchnią krzywą ciała, albo co na iedno wyńdzie, linią krzywą leżącą na różnych płaszczyznach, do którey oznaczeniá potrzebuiémy koniecznie dwóch płászczyzn na wystawienie trzech współ-uszykowanych *x*, *y*, *z*: i s tey to podobno przyczyny takowe linie krzywe uważane od W. Geometry

ometry *Clairaut* (a) nazwané były DWOISTEY KRZYWIZNY (*Curvae duplicis Curvaturae*). Wyſtáwmy ſobie (fig. 46.) na płaſzczyźnie gruntowéy, którą záwſze będzie płaſzczyzna papiéru, dwié linie nieoznaczonéy wielkości do ſiebie pionowé, *RS* na odcinki, *CD* na rachowanie przyſtaw *y*; powtóré trzecią linią *GH* pionową do płaſzczyzny papiéru, i przechodzącą przez punkt *A* wzięty za początek odcinków: ta liniá ſłużyć będzie do znaczeniá przyſtaw *z*, które nazywać będziémy *Przyſtawami wyſokości*: punkta więc linii krzywéy na różnych płaſzczyznach leżącéy, czyli powiérzchnie ciał proſté lub krzywé odnośić zawſze będziémy do płaſzczyzny gruntu za pomocą trzech wſpół-uſzykowanych *AP*, *MP*, *MZ*, (fig. 47), s których każdá będzie równo-ległą ſwéy linii głównéy na fig. 46; takowé linie główné *RS*, *CD*, *GH*, nazywaią ſię OSIAMI (*Axes*). A iako ſtrona *AS* będzie miéyſcém odcinków dodatnych, ſtrona *AR* odiemnych; powtóré, ſtrona *AC* miéyſcém przyſtáw dodatnych, *AH* przyſtáw odiemnych; tak ſtrona *AG* nad płaſzczyzną gruntu, będzie wyrážać przyſtawy wyſokości dodatné, ſtrona zaś *AH* też przyſtawy odiemné. Zebyśmy ſię łatwiéy znaleśdź mogli w takowych odmianach położeniá, wygodniéy nám ieſzcze będzie wyſtawić ſobie trzy płaſzczyzny do ſiebie pionowé, przecinaiące ſię w liniach głównych: to ieſt płaſzczyznę gruntu; powtóré płaſzczyznę przecinaiącą grunt w linii *RS*; na koniec płaſzczyznę przecinaiącą tenże grunt w linii *CD*: obie té oſtatnié płaſzczyzny przecinać ſię będą w linii *GH*, a przeto będą do ſiebie i do gruntu pionowé. Trzy takowé płaſzczyzny przechodzące przez punkt *A*, a rościągnioné do odległości nieoznaczonéy, rozetną całą pełność miéyſca na ośm przedziałów odpowiadaiących tyluż położeniom wſpół-uſzykowanych; *pierwſzy* przedział *CGS* ſłuży wſzyſtkim wſpół-uſzykowanym dodatnym, to ieſt: na $+x$, $+y$, $+z$; *drugi* przedział

Fig. 46.

L 2 CGR

(a) Traité des Courbes à double Courbure.

CGR służy na $-x$, $+y$, $+z$. *trzeci* przedział *DGS* iest na $+x$, $-y$, $+z$: *czwarty* przedział *RGD* iest na $-x$, $-y$, $+z$: *piąty* przedział *SHC* na $+x$, $+y$, $-z$; *szósty* przedział *CHR* na $-x$, $+y$, $-z$: *siodmy* przedział *SHD* na $+x$, $-y$, $-z$: *ósmy* przedział *RHD* na $-x$, $-y$, $-z$: s tych przedziałów iedné zamykaią dwie współ-uszykowané s témiż samémi znakami, drugié iednę tylko współ-uszykowaną spólną, co do znaku: trzecié nakoniec wszystkié trzy współ-uszykowané co do znaków różné. A maiąc zrównanié na iakąkolwiek powierzchnią do trzech takowych płaszczyzn odnoszoną, łatwo nám iest przez to samo rozumowanié, któregośmy w §. 24 użyli, rossądzić czyli któré przedziały są między sobą równé i podobné: i tak n.p. ieżeli zrównanié zawiérać będzie samé potęgi parzysté z, powierzchniá leżącá nad płaszczyzną gruntową *RCGS*, będzie równá i podobná powierzchni pod tym gruntem położonéy; i płaszczyzną gruntowá będzie tém, czém były śrzednice w liniach krzywych; czyli będzie PŁASZCZYZNĄ ŚRZODKOWĄ (*Planum diametrale*): ieżeli zaś w zrównaniu na powierzchnią, x albo y będą się znaydować w samych wymiarach parzystych; w pierwszym razie płaszczyzna *CGDH*, w drugim zaś przypadku płaszczyzna *SGRH* będzie płaszczyzną śrzodkową.

Wyrazić linią iakąkolwiek leżącą na powierzchni ciała, przez zrównanié Algebraiczné; iest to ogarnąć wszystkié odmiany punktu tę linią opisuiącégo: takowé odmiany względém płaszczyzny gruntowéy pokáżą nám przystawy wysokości z; odmiany względém płaszczyzny *SGRH* pokáżą nám wártości y; odmiany nakoniec względem płaszczyzny *CGDH* odkryią nám odcinki x: skąd nám łatwo poznać, że odmiany iednéy współ-uszykowanéy są zawisłé od drugich; a przeto że w zrównaniu na powierzchnią, káżda ilość odmienna iest funkcyą dwóch innych. Tu iuż łatwo poymiémy, że ieżeli powierzchniá ciała iakiégo iest opisaná obwodém linii ciągłéy prostéy

lub

lub krzywéy, cała iéy rozległość zawarta będzie w iednem zrównaniu, i będzie Powierzchnią ciągłą (*Superficies continua*): ieżeli zaś opisana iest tak, iż każda iéy część wypadła z obrotu innégo gatunku linii, będzie także każda takowa część należała do innégo zrównania, skąd powstaie Powierzchnia niejednoforemna (*Superficies discontinua*), która do teraźnieyszych uwag nie będzie należyć. W zrównaniu na powierzchnie ciągłe, z bydź może funkcyą iednokształtną y, x; a przeto na każdą wartość x, y, iedna tylko będzie odpowiadać przystawa wysokości, i takowe powierzchnie będziémy znowu nazywać Pierwszego porządku (*Superficies primi ordinis*): ieżeli zaś będzie funkcyą dwó-kształtną x, y; na każdą wartość x, y, dwie będą odpowiadać przystawy wysokości, i takowe powierzchnie będą Drugiego porządku (*Superficies secundi ordinis*), co ieszcze rościągnąwszy do wyższych wymiarów z, wynaydziemy dalszy podział powierzchni tak, iak na linie krzywe, gdzie należy nam ostrzec że wymiary ilości odmiennych nie są tak bespieczną cechą do rozeznawania powierzchni, iak do linii krzywych: czego będziémy mieć przykład na powierzchi walca i ostrokrąga.

S tych pierwszych obrazów, któreśmy sobie o zrównaniach nieoznaczonych między trzema ilościami odmiennémi wystawili, domyślémy się łatwo, iż nam wypadaią dwoiakiego rodzaiu dociekania: to iest sposób wyrażenia zrównaniém powierzchni iakiegokolwiek ciała: i sposób wyrażenia linii na powierzchni ciała leżącéy: przypatrzmy się iak iedno s tych zagadnień iest od drugiégo zawisłe.

Poznanie powierzchni iakiégo ciała nabywa się przez poznanie wielu barzo punktów na téy powierzchni leżących, a przeto przez znalezienie prawa, podług którego té punkta się odmieniaią. Do poznania wielu na raz takowych punktów iest iedyny sposób poznać linie różne na takowéy powierzchni

 leżącé;

leżące; te linie uważać się mogą iako rysy zostawione od płaszczyzn przecinaiących ciało; a przeto poznanie powierzchni, zawisło od poznaniá linii na niey zostaiących; poznanie zaś takowych linii, nabywá się przez uwagę różnych przecięć takowey powierzchni od płaszczyzn. Weźmy sobie za przykład kulę, przeciąwszy ią w iakiemkolwiek mieyscu płaszczyzną, liniá krzywá tem przecięciem na powierzchni
Fig. 47. odrytá będzie koło, więc na fig. 47. punkt Z będzie leżał zawsze na kole; niech będzie $AP=x$, $PM=y$, $MZ=z$, przez punkt Z i przez środek kuli, czyli przez punkta Z, A, P, przeciąwszy kulę, mámy náprzód $AM^2=x^2+y^2$; $AZ^2=AM^2+MZ^2=x^2+y^2+z^2$; aże AZ iest promień kuli; więc $a^2=x^2+y^2+z^2$ iest zrównaniem na kulę. Chcąc teráz od zrównaniá na kulę przyiśdź do poznaniá linii wypádaiącey s przecięciá kuli przez płaszczyznę gruntową; ta kondy-
Fig. 46. cyá uczy nás, że $z=o$, a przeto zrównanie na linią szukaną iest $a^2=x^2+y^2$, ieżeli uczynię w zrównaniu na kulę $x=o$, otrzymám $a^2=y^2+z^2$ na linią s przecięciá kuli płaszczyzną $SGRH$: ieżeli zaś $y=o$, wypadnie mi $a^2=x^2+z^2$, zrównanie na linią, którą płaszczyzna $CGHD$ swem przecięciem zostawiá.

Powierzchnie więc ciał uważać będziemy przez różne przecięciá tychże ciał od płaszczyzn, i przez linie takowem przecięciem zrodzone. Ponieważ zaś przytrafić się może, że liniá krzywá na powierzchni zostaiąc, leży na wielu płaszczyznach, i wypaśdź nie może s przecięciá ciała iedną płaszczyzną; ale tylko s przecięciá powierzchni przez drugą powierzchnią; przeto rozdzielemy uwágę naszę na dwa przypádki: w pierwszym poznámy linie na powierzchniach ciał zostaiące, które wypaśdź mogą s przecięciá ciała od płaszczyzny: powtóre uważać będziemy linie krzywe zostaiące na powierzchni, ale razem znayduiące się na wielu płaszczyznach.

§. XXIX.

Ponieważ zamierzyliśmy sobie uważać samę po-

wierzchnie

wiérzchnie ciągłe, będą do uwagi naſzéy należyć ſame tylko ciała OKRĄGŁE TOCZONE (*Corpora tornata*), których powierzchnia wyrobiona ieſt podług pewnego prawa, czyli raczéy opiſana linią krzywą ciągłą przez ſwóy obrot, iakiemi ſą KULA (*Globus*), WALEC (*Cylindrus*), i OSTROKRĄG (*Conus*). Przez ciała takowe przechodząc płaſzczyzna przecinaiąca, zoſtawia różnego gatunku linie krzywe podług różnego ſwego położenia. Roſtrząſaią ſię powierzchnie ciał okrągłych i linie różne wypadaiące s przecięcia ich płaſzczyzną.

A naprzód odnoſząc punkta powiérzchni takiego ciała do trzech płaſzczyzn głównych, wyſtáwmy ſobie powiérzchnią przeciętą równo-legle płaſzczyznie gruntowéy *SCRD* (fig. 46.); tém przecięciém zoſtawione linie na powiérzchni bydź mogą równe, tak dalece że do iakiéykolwiek wyſokości podnieſiémy płaſzczyznę przecinaiącą; linia krzywa będzie ta ſama, a przeto w takowéy powiérzchni linia s przecięcia równo-ległego gruntowi zrodzona, ieſt niezawiſła od przyſtáw wyſokości, i zrównanie na takową powiérzchnią nie powinno zamykać *z*, ale bydź powinno takiém, iakiém ſię wyráża linia krzywa będąca zasadą ciała. Wyſtáwmy ſobie WALEC PROSTY (*Cylindrus rectus*), którego ZASADĄ (*Basis*) ieſt KOŁO: albo WALEC POCIĄGŁY (*Cylindrus ſcalenus*), gdzie Ellipſa ieſt zaſadą; przecinaiąc ciało takie płaſzczyzną równo-ległą zaſadzie, a razém pionową do osi walca, wypadać będą s takowych przecięć ſame koła między ſobą równe na walec proſty, i zrównanie na powiérzchnią takiego walca ieſt $a^2=x^2+y^2$: na walec zaś pociągły ſame będą Ellipſy między ſobą równe, przeto zrównanie $g^2y^2+k^2x^2=g^2k^2$, będzie wyrážać powiérzchnią walca pociągłego. Właſność ta ſłużý wſzyſtkim ciałom WALCZASTYM i GRANIASTO-SŁUPOWYM (*Corpora Cylindrica, priſmatica*), i zrównania na powiérzchnią takowych ciał nie zamykaią *z*, bo w nich przecięcia równo-ległe zasadzie rodzą linie proſte lub krzywe między ſobą równe. Fig. 46.

Powtore przecinaiąc ciała płaſzczyzną równo-ległą

gruntowi, linie na powierzchni takowém przecięciém zrodzoné bydź mogą podobné §. VII. to ieſt tego ſamégo porządku i gatunku, ale mnieyſzé lub większe, i na każdé takowé przecięcié z ſtaie ſię ilością ſtateczną. Wyſtáwmy ſobie oſtrokrąg okrągły, którégo zaſadą ieſt koło (*Conus rectus*), lub pociągły, którégo zaſadą ieſt Ellipſa (*Conus ſcalenus*); przecinaiąc od wierzchołka płaſzczyzną równo-ległą zasadzie taki oſtrokrąg, ryſować ſię będą na powierzchni takowém przecięciém ſame koła na oſtro-krągu okrągłym; ſame zaś Ellipſy na oſtro-krągu pociągłym: té zaś koła i Ellipſy nie będą równé, ale będąc roſnąć podług odległości płaſzczyzny przécinaiącéy, i ich obwody będą proporcyonalné wyſokości $=a$, tak dalece że liniá przez punkta té proporcyonalné prowadzoná ieſt proſta: ciała takowé nazywaią ſię OSTRO-KRĄGOWE, albo ogólniéy OSTRO-GRANIASTE (*Corpora conica, pyramidalia*); przeto zrównanié na té ciała bydź powinno takié, iż na przecięcié ich płaſzczyzną przez punkta té proporcyonalné, rozebrać ſię powinno na zrównaniá wyrażaiącé linie proſté. Takową zaś włáſność maią wſzyſtkié ZRÓWNANIA IEDNO-RODNE (*Æquationes homogeneæ*), czyli zawiéraiącé we wſzyſtkich terminach równé wymiary ilości odmiennych, x, y, z; tak dalece, że ſumma wymiaru w iednym terminie, ieſt równá ſummie wymiarów terminu innégo którégokolwiek.

A naprzód mieliśmy iuż przykład pod §. 22. że zrównaniá iedno-rodné między ilościami odmiennémi iakiém ieſt n. p. $Ax^{m-n}y^n+Bx^{m-p}y^p+$ i t. d. $=o$, rozbierać ſię mogą na zrównaniá proſté 1go ſtopnia. Żebyśmy ſię zaś o tém barziéy przekonali w teraźnieyſzych zrównaniach, wyſtáwmy ſobie zrównanié iedno-rodné $z^m=az^{m-n-p}x^ny^p$, którégo wſzyſtkié terminy ponieważ tę ſamę potęgę ilości odmiennych razém wziętych zamykaią, doſyć nám na iednym przeſtać. Teraz przypuśćmy na fig.47. że płaſzczyzna przecinaiącá przechodząc przez punkt A ieſt pionową

nową do płaſzczyzny gruntu *APM*, którą przecina w linii *AM*, nazwáwſzy $AP = x$, $PM = y$, $MZ = z$ poniéważ kąt *PAM* płaſzczyzny przecinaiącéy z linią *AP*, ieſt nám znany; będzie nám także znany ſtóſunek *AM:AP*, i *AM:MP*, a przeto będzie $y = hx$, gdzie h ieſt funkcyą tego kąta: włożywſzy więc w zrównanié iednorodné za y wártość hx, będzie - - - $z^m = az^{m-n-p} . h^p x^{n+p}$, zrównanié takiégo wzoru iak $Ax^{m-n} y^n + Bx^{m-p} y^p +$ i t. d. $= o$. więc każdá powierzchniá wyrážoná zrównaniém iednorodném między trzemá odmiennémi ilościami x, y, z, przeciętá płaſzczyzną pionową na grunt, i przechodzącą przez śrzodek *A*, wydá linią proſtą. Iakoż przeciąwſzy oſtrokrąg iakikolwiek pionowo na grunt tak, aby płaſzczyzna przecinaiącá przeſzła przez oś oſtrokrąga; linie s tego przecięciá zrodzoné będą proſté przecinaiące ſię w wierzchołku. Co ſłuży także wſzyſtkim ciałom graniaſto-ſłupowym, w których zrównaniu iedna z ilości odmiénnych ſtaie ſię albo zero, albo ilością ſtateczną, podług położeniá płaſzczyzny przecinaiącéy względém płaſzczyzn głównych: a przeto zrównanié na ciało graniaſto-ſłupowé w tém przecięciu będzie tylko iednę ilość odmienną zamykać, którégo piérwiáſtki wyrážaią linie proſté między ſobą równo-ległe, S tych uwág łatwo nám będzie wynaleśdź zrównanié na powierzchnią oſtro-krąga iakiégokolwiek. Niech będzie na fig. 47. oſtro-krąg pociągły *ADKEL*, którégo zaſadą ieſt Ellipſa wyrażoná zrównaniém $g^2 y^2 + k^2 x^2 = k^2 g^2$, odnióſłſzy iego powierzchnią do trzech płaſzczyzn głównych przez wſpół-uſzykowané $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, tak aby płaſzczyzna gruntowá była równo-ległą zaſadzie *DKEL*, i *AP* równo-ległá osi większey *DE*; *KL* równo-ległá *PQ*; wyſokość *QM* równo-ległá osi oſtrokrąga *CA*; poniéważ przecięciá równo-ległé płaſzczyznie gruntowéy rodzą Ellipſy podobné, których śrzednice $DE = g$, $KL = k$, będą miały ſtóſunek ſtateczny do wyſokości z; to ieſt $g = mz$, $k = nz$; włożywſzy té Fig. 47.

 wártości

wártości w zrównanié na Ellipsę; otrzymámy - - $m^2y^2+n^2x^2=m^2n^2z^2$. zrównanié na powierzchnią szukaną. W oſtro-krągu proſtym czyli okrągłym, ponieważ obydwié śrzednice są równé; mámy $m=n$, a przeto zrownanié $y^2+x^2=m^2z^2$ na powierzchnią oſtro-krąga proſtégo.

Linie krzywé s przecięciá kuli wypádaiącé.

Zoſtaie nám teráz po przécięciach równo-ległych i pionowych na grunt przez śrzodek A, roſtrząſnąć inné przecięciá iakiékolwiek trzech tych ciał, i wynaleśdź linie krzywé, któré się ſtąd na powierzchni rodzą. Całe to działanié zawiſło od przenieſieniá wſpół-uſzykowanych s płaſzczyzny gruntu na płaſzczyznę przecinaiącą, i od wyrażeniá iednéy przez funkcye dwóch drugich, tąk aby zrównanié między trzema odmiennémi ilościami na powierzchnią, przerobić na zrównanie do dwóch wſpół-uſzykowanych na linią krzywą przecięciém zrodzoną. Zaczniymy od kuli, na którą zrównanié $a^2=x^2+y^2+z^2$, między trzema wſpół-uſzykowanémi na fig. 49. $AP=x$, $QP=y$, $QM=z$. Poprowádźmy płaſzczyznę przecinaiącą przez powierzchnią kuli tak, aby przecięła płaſzczyznę gruntową w linii TL, uczyniwſzy z oſią AR kąt $TSR=ASL=p$. Na linią TL przecięciá, ſpuśćmy z Q, M, dwie pionowé QT, MT; będzie więc kąt $QTM=q$ wyrážáł pochyłość płaſzczyzny przecinaiącéy do płaſzczyzny gruntowéy. Od początku odcinków A ſpuśćmy na linią przecięciá pionową AL: chcąc wyrazić linią krzywą tém przecięciém na powierzchni kuli zoſtawioną, potrzeba mi zrównanié między x, y, z, przerobić na inné między $ST=t$, i $TM=u$. Nazwiymy AS, m; będzie $AL=m\,W\!ſt.p$, $LS=m.Doſt.p$, od T na oś przeſzłą AS ſpuſzczám pionową $TR=t.W\!ſt.p$, $SR=t.Doſt.p$; a ponieważ kąt $QTS=90°$, kąt $PQT=TSR=p$; $QM=u.W\!ſt.q$, $QT=u.Doſt.q$; $PR=u.Doſt.q.W\!ſt.p$, $PQ-TR=u.Doſt.q.Doſt.p$: a zatém $x=AP=AS+SR-PR$, $y=TR+PQ-TR$, czyli - - - $x=m+t.Doſt.p-u.Doſt.q.W\!ſt.p$; - - - $y=t.W\!ſt.p+u.Doſt.q.Doſt.p$; $z=QM=u.W\!ſt.q$; włożywſzy

Fig. 49.

wſzy té wártości w zrównanié na kulę $a^2=x^2+y^2+z^2$; otrzymámy inné między t, u, na koło leżącé ná płaſzczyznie przécinaiącéy. Zebyśmy to zrównanié uczynili prościéyſzém, wyſtáwmy ſobie że kąt $TSR=90°$ czyli że płaſzczyzna przécinaiącá pádá pionowo do osi AS; będzie więc $W\!ſt.p=1$, $Doſt.p=0$, a przeto $x=m-u.Doſt.q$, $y=t$; $z=u.W\!ſt.q$, włożywſzy té wártości w zrównanié na kulę, zamiéniemy ié na

$$a^2=m^2-2mu.Doſt.q+u^2Doſt.q^2+t^2+u^2W\!ſt.q^2$$

czyli na $a^2=m^2-2mu.Doſt.q+t^2+u^2$ - - położywſzy $u-m.Doſt.q=s$, - - $u^2-2mDoſt.q=s^2-m^2Doſt.q^2$, $1-Doſt.q^2=W\!ſt.q^2$, wypadnie

$$t^2+s^2=a^2-m^2W\!ſt.q^2.$$

Zrównanié na koło, którégo promiéń $=\sqrt{(a^2-m^2W\!ſt.q^2)}$, wſzyſtkié więc przecięciá kuli płaſzczyzną wydaią koło.

Té ſamé wártości nowych wſpół-uſzykowanych ſłużyć nám będą do innych ciał. Mámy naprzód zrównanié na walec proſty $a^2=x^2+y^2$; wyſtáwmy ſobie że tén tak ieſt przecięty od płaſzczyzny, iż TS pádá pionowo na AR, a przeto $p=90°$, mámy więc $x=m-u.Doſt.q$, $y=t$; włożywſzy té wártości w zrównanié $a^2=x^2+y^2$ przerobiémy ié na - -

Przecięciá walca i linie ſtąd zrodzoné.

$a^2=(m-u.Doſt.q)^2+t^2$, czyli - - -

$$t^2=a^2-m^2+2mu.Doſt.q-u^2Doſt.q^2 \quad - \; - \quad (\alpha)$$

zrównanié (α) ieſt na Ellipſę podług cechy wyłożonéy w §. XIII; chcąc tę Ellipſę lepiéy poznać odnieśmy wſpół-uſzykowané do śrzodka, położywſzy

$u=s+\dfrac{m}{Doſt.q}$, zrównanié ſię zamieni ná

$$t^2=a^2-s^2Doſt.q^2 \quad - \; - \; - \quad (\beta)$$

Ellipſa więc s tego przecięciá zrodzoná, leży na płaſzczyznie przecinaiącéy, maiącá ſwóy śrzodek na osi walca; oś mniéyſzá téy Ellipſy ieſt $t=a$, równá promieniowi koła gruntowégo; oś zaś większá ieſt równá $\dfrac{a}{Doſt.q}$: ponieważ $a<\dfrac{a}{Doſt.q}$, im Doſtawa q ieſt

 ilością

ilością mnieyfzą, to ieft, im pochyłość płafzczyzny przecinaiącey do płafzczyzny gruntowey, ieft mnieyfzá, tém oś większá wypádá dłużfzá; a przeto i Ellipfa: co nám daie widzieć, że przecięcie walca proftégo płafzczyzną nachyloną do gruntu, zawfze rodzi Ellipfę: im kąt q ieft większy, tém ta Ellipfa ieft dłużfzá; kiedy $q=90°$, oś ta ftaie fię niefkończoną, bo $Doft.q=o$; czyli oś ta ftaie fię linią równoległą osi walca, a przeto przecięcie pionowé na grunt wálca rodzi linie proſté między fobą równo-ległe: im zaś q ftaie fię mnieyfzém, tém oś większá Ellipfy zbliżá fię do równości z osią mnieyfzą; i kiedy $q=o$, $Doft.q=1$, a zrównanié (β) ftaie fię zrównaniém na koło, więc wfzyftkié przecięciá walca równo-ległé gruntowi wydaią koło.

Przyftófuymy té famé rozumowania do walca podłużnégo, którégo zafada ieft Ellipfa. Zrównanié na taki walec ieft $g^2y^2+k^2x^2=k^2g^2$, kładąc $x=m-u\,Doft.q$, $y=t$; przerobiemy ié na

$$t^2=\frac{k^2}{g^2}[g^2-m^2+2muDoft.q-u^2Doft.q^2] \quad \cdot\ \cdot\ (\gamma).$$

(γ) ieft znowu zrównaniém na Ellipfę: niech będzie $u=s+\frac{m}{Doft.q}$, ta wártość włożoná w (γ), zamieni zrównanié na

$$t^2=\frac{k^2}{g^2}(g^2-s^2Doft.q^2) \quad \cdot\ \cdot\ (\delta).$$

oś mnieyfza téy Ellipfy uczyniwfzy $s=o$, wypádá $t=k$, to ieft ta fama co i Ellipfy gruntowéy; oś zaś większá kiedy $t=o$, wypádá $s=\frac{g}{Doft.q}$, aże . .

$\frac{g}{Doft.q}>g$, więc Ellipfa s tego przecięciá pochyłégo do gruntu ieft dłużfzá iak zafáda. Nazwiymy tę oś mnieyfzą Ellipfy s przecięciá wypadłéy, daną przez t,

nazwiymy

nazwiymy ią mowię ϕ; oś większą daną przez s, nazwiymy ψ, mámy $\phi.\psi = \frac{kg}{Doſt.q}$, czyli $\phi\psi : k.g = \frac{1}{Doſt.q} : 1$. Ażé $\frac{1}{Doſt.q} = Sieczná.q$. §. 51. Algebry, przeto mámy w oſtatniéy proporcyi tę barzo piękną prámdę zamkniętą,, że przeciąwſzy walec podłużny ,,płaſzczyzną pochyłą do gruntu, otrzymuiémy s tego ,,przecięciá Ellipſę, w którey mnogość dwóch osi mą ,,ſię do mnogości osi zaſady, iako ſię má Sieczná po- ,,chyłości płaſzczyzny do wſtawy proſtéy.,,

Zoſtaią nám ieſzcze do roſtrząſaniá różné przecięciá oſtro-krąga: żebyśmy tę rzecz náyogólniéy ogarnęli, weźmy do tego oſtro-krąg podłużny, z niégo bowiem łatwo nám będzie przyiśdź do oſtro-krąga proſtégo czyli okrągłégo. Wynaleźliśmy práwda ná powierzchnią oſtro-krąga zrównanié $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$. ponieważ nám iuż wchodzi m w x, y, na przecięciá; wyráźmy raczéy tę powierzchnią zrównaniém - - - $g^2k^2z^2 = g^2y^2 + k^2x^2$. wyſtawiwſzy ſobie że zaſada oſtro-krąga leży na płaſzczyznie gruntowéy APQ fig. 49. którey śrzednice ſą g, k. Przeciąwſzy tén oſtro-krąg płaſzczyzną tak, iak nám fig. 49. pokazuie, kładąc $x = m + t.Doſt.p - u.Doſt.q.Wſt.p$; - - - $y = t.Wſt.p + u.Doſt.q.Doſt.p$. $z = u.Wſt.q$; zrównanié $g^2k^2z^2 = g^2y^2 + k^2x^2$ na oſtro-krąg podłużmy, wypadnie:

Przecięciá oſtrokrąga, i linie krzywé ſtąd wypádaiącé.

Fig. 49.

$$\begin{aligned} & g^2k^2.Wſt.q^2u^2 - 2g^2.Wſt.p.Doſt.q,Doſt.p.tu \\ & - g^2.Doſt.q^2.Doſt.p^2.u^2 + 2k^2.m.Wſt.p.Doſt.q.Doſt.p.tu \\ & - k^2.Doſt.q^2.Wſt.p^2u^2 \\ & + 2k^2mDoſt.qWſt.p.u - 2k^2mDoſt.pt \quad - - - \\ & - g^2.Wſt.p^2.t^2 - k^2m^2 = 0 \quad - - - \quad (A''). \\ & - k^2Doſt.p^2.t^2; \end{aligned}$$

Na oſtro-krąg zaś proſty gdzie $g = k$, $g^2z^2 = y^2 + x^2$ zamieni ſię zrównanié na

g².Wſt.

$$g^2.Wſt.q^2.u^2 - 2(1-m)Wſt.p.Doſt.q.Doſt.p.tu - t^2 - Doſt.q^2.u^2 + 2mDoſt.q.Wſt.p.u - m^2 = 0 \quad - \ - \ - \quad (B''). - 2mDoſt.p.t$$

to zrównanié wyrážá linie krzywé drugiégo porządku tak, iak i (A''): dlá tego żebyśmy na wypádki trafili prościéyſzé, obiérámy ſobie do roſtrząſaniá zrównanié (B''), a przeto odcinki różné oſtro-krąga proſtégo. A naprzód przetniymy oſtro-krąg proſty tak, aby płaſzczyzna przecinaiącá była proſto-padłá do gruntu, będzie więc $MTQ = q = 90^o$, $Wſt.q = 1$, $Doſt.q = 0$. wprowadziwſzy tén warunek w zrównanié (B''), zamiéniémy ié na

$$g^2u^2 = t^2 + 2mDoſt.p.t + m^2 \quad - \quad - \quad (C'').$$

podług prawideł podanych w §. XIII. i innych w Rozdziale III. §. XIX. rozſądzić nám łatwo, że zrównanié (C'') ieſt na Hyperbolę, któréy ledwo-nieſtyczne proſté zamykaią ſię w zrównaniách - - - $gu + t + mDoſt.p = 0$, - - - $gu - t - mDoſt.p = 0$. Znáydziémy tę ſamę linią krzywą na przecięcié pionowé do gruntu oſtro-krąga podłużnégo, wprowadziwſzy w (A'') kondycyą, że $Wſt.q = 1$, $Doſt.q = 0$. przeto oſtro-krąg iakikolwiek przecięty pionowo do gruntu i záſady ſwoiéy, wydaie Hyperbolę.

Fig. 49. Niech teráz płaſzczyzna przecinaiącá padnie pochyło ná grunt tak aby iéy przecięcié TL było pionowé do osi AR na fig. 49. będzie więc $TSR = p = 90^o$, $Wſt.p = 1$, $Doſt.p = 0$, wprowadziwſzy té warunki w zrównanié (B'') zamiéniémy ié na

$$t^2 = (g^2Wſt.q^2 - Doſt.q^2)u^2 + 2mDoſt.q.u - m^2 \quad - \ - \quad (D'')$$

gdyby przecięcié albo pochyłość płaſzczyzny przecinaiącey, do gruntowéy była taká, iż $g^2Wſt.q^2 = Doſt.q^2$, czyli $\frac{1}{g} = Sty.q.$ liniá krzywá s takiégo przecięciá zrodzoná byłaby Parabola opiſaná zrównaniém - - -

$$t^2 = 2mDoſt.q.u - m^2$$

ieżeli

ieżeli zaś $g^2 Wſt.q^2 - Doſt.q^2$ nie będzie zero, żebyśmy dokładnieý tę linią przecięciém zrodzoną poznali, odnieśmy wſpół-uſzykowané do śrzodka położywſzy $u = s - \frac{m.Doſt.q}{g^2 Wſt.q^2 - Doſt.q^2}$, zrównanié (C'') zamiéni ſię na

$$t^2 = (g^2 Wſt.q^2 - Doſt.q^2)[s^2 - \frac{g^2.Wſt.q^2 m^2}{(g^2 Wſt.q^2 - Doſt.q^2)^2}] \quad - \quad - (E'').$$

gdzie widzémy oczywiście, że ieżeli $g^2 Wſt.q^2 > Doſt.q^2$, liniá krzywá odrytá płáſzczyzną przecinaiącą będzie Hyperbola; ieżeli zaś - - - $g^2 Wſt.q^2 < Doſt.q^2$, liniá krzywá będzie Ellipſa: na Ellipſę więc $Sty.q < \frac{1}{g}$, na Hyperbolę $Sty.q > \frac{1}{g}$, na Parabolę zaś $Sty.q = \frac{1}{g}$; poniéwáż g wyráżá promiéń koła gruntowégo niech będzie $g = 1$: wypádá ná Parabolę $Sty.q = 1 = Sty.45°$. Na Ellipſę $Sty.q < Sty.45°$. na Hyperbolę $Sty.q > Sty.45°$. Wyſtáwmy ſobie na fig. 50. przecięcié oſtro-krąga przez wiérzchołek D i śrzodek C proſtopadle na grunt; wypadnie tróykąt DAB równo-ramienny, linie DB, DA, będą bokami oſtro-krąga, CA promień koła gruntowégo, DC osią oſtrokrąga: poprowadziwſzy linią proſtą EC s śrzodka tak, aby był kąt $ACE = 45°$; będzie EC równo-ległá DB, więc kiedy płaſzczyzna przecinaiąc oſtro-krąg będzie równo-ległą do iego boku DB, liniá krzywá s tego przecięciá zrodzoná będzie *Parabola*; kiedy zaś ta płaſzczyzna padnie na grunt pod kątem mniéyſzym od 45°, iakim ieſt n. p. LCA; to ieſt kiedy przeciągniona za linią CL co raz barziey od BD oddalać ſię będzie ku ſtronie D, liniá krzywá ſtąd zrodzoná będzie *Ellipſa*: kiedy nakoniec płaſzczyzna przecinaiącá padłſzy pod kątem więkſzym od 45° na grunt, w przeciągnieniu ſchodzić ſię będzie z bokiem ku ſtronie BD, a oddalać ſię coráz barziéy od tegóż boku ku ſtronie DB, liniá krzywá Fig. 50.

s takiégo

s takiégo przecięciá zrodzoná będzie *Hyperbola*. Przecięcié więc oſtro-krąga wydaie wſzyſtkié linie krzywé 2go porządku, któré ſtąd wzięły imie ODCINKÓW OSTRO-KRĄGOWYCH (*Sectiones Conicae.*)

§. XXX.

Wyráżaią ſię przez zrównaniá powierzchnie ciáł powſtaiącé z obrotu ſámych linii krzywych 2go porządku.

Wſzyſtkié powiérzchnie ciáł dotąd od nás uważáné, będąc wyrażoné zrównaniém zawiéraiącém trzy wſpół-uſzykowané x, y, z, w drugim ſtopniu, ſą powiérzchniami 2go porządku; té przecięté płaſzczyzną nie wydały linii krzywych wyżſzégo porządku nad tén, do którégo ſamé náleżą: nie mogą bowiem takowé powiérzchnie powſtać tylko z obrotu linii 2go porządku. I tak powierzchniá *kuli* powſtaie z obrotu obwodu koła około ſwéy śrzednicy: walec z obrotu linii proſtéy leżącéy na obwodzie koła lub Ellipſy; i proſto-padłéy do płaſzczyzny gruntu. Oſtrokrąg s podobnégo obrotu linii proſtéy przecinaiącéy wyſokość oſtro-krąga w iego wiérzchołku, a zatém nachyłonéy do płaſzczyzny gruntu pod tym ſamym kątém. Wſzyſtkié té powiérzchnie 2go porządku wyrazić możémy zrównaniém ogólném $Z^2 = x^2 + y^2$, gdzie Z^2 ieſt iłością ſtateczną na ciała graniaſto-ſłupowé, których boki ſą ſobie równo-ległé: ieſt zaś Z^2 funkcyą wyſokości z na ciała oſtro-graniaſté. Zebyśmy nic nie opuścili co do wiadomości innych ieſzcze powiérzchni 2go porządku náleży, rodzących ſię z obrotu ſamych linii krzywych 2go porządku, tak iak kula rodzi ſię s ſamégo obrotu koła; pomyślmy, że na fig. 8. Tabl: II. liniá krzywá $R'BM$ ieſt 2go porządku, którą oś $R'S$ dzieli na dwie części równé i podobné: obrociwſzy takową linią około ſwéy śrzednicy $R'S$, obwód iéy opiſzé powierzchnią krzywą: iakże takową powierzchnią wyrażémy zrównaniém? łatwo każdy poymuie, że natura takowéy powiérzchni zależy od oznaczeniá funkcyi náleżytéy Z. Na tén koniec odnieśmy tę powierzchnią do trzech płaſzczyzn głównych wyrażonych na fig. 51. przez trzy wſpół-uſzykowané pionowé $RP = x$, $PQ = y$, $QM = z$,

Fig. 8.

Fig. 51.

$QM=z$, przez punkt M, i początek odcinków R ſpuśćmy płaſzczyznę przecinaiącą, pionowo do płaſzczyzny gruntowéy RQP, tak, że liniá RQ będzie linią przecięciá; ta płaſzczyzna odetnie linią krzywą takiéy natury, z iakiéy obrotu powſtała powierzchniá, i ta liniá krzywá będzie całá leżyć na płaſzczyznie przecinaiącéy, któréy zrównanié wyrazi ſię przez dwie wſpół-uſzykowané RQ, QM. Dáymy że ta powiérzchniá powſtała z obrotu Ellipſy; więc punkt M leży na Ellipſie, na którą mámy na końcu §. XIII. zrównanié (A') $RQ^2=fz-\frac{f}{g}z^2$: gdzie f znaczy linią równaniá całą, g oś większą Ellipſy; będzie więc funkcya Z, $fz-\frac{f}{g}z^2$ na teraźniéyſzy przypádek; aże $RQ^2=x^2+y^2$, przeto

$$fz-\frac{f}{g}z^2=x^2+y^2 \quad - \quad - \quad - \quad (M').$$

ieſt zrównaniém na powiérzchnią opiſaną przez obrot Ellipſy około ſwoiéy śrzednicy, czyli na powiérzchnią *Sferoidy*.

Gdyby liniá opiſuiącá powiérzchnią była Parabola; punkt M na fig. 51. będzie punktém náleżącym do Paraboli, gdzie $g=\infty$; wprowadziwſzy tę kondycyą w zrównanié (M'), wypadnie zrównanié na powiérzchnią Paraboliczną: Fig. 51.

$$fz=x^2+y^2 \quad - \quad - \quad - \quad (M'').$$

gdyby zaś powierzchniá krzywá opiſaná była obrotém Hyperboli, gdzie oś większá ieſt zewnętrzná linii krzywéy, wprowadziwſzy $-g$, za g w (M'); otrzymámy zrównanié na powiérzchnią Hyperboliczną:

$$fz+\frac{f}{g}z^2=x^2+y^2 \quad - \quad - \quad (M''').$$

Spoſób tén wyráżaniá linii krzywych rodzących ſię s przecięciá powierzchni krzywéy płaſzczyzną, nie może ſłużyć tylko kiedy liniá krzywá tak leży na

Sposób przenoszenia linii krzywych z wielu płaszczyzn na iednę

powierzchni, że ią całą płaszczyzna przecinaiąca zaiąć może: to iest, kiedy ią za pomocą przecięcia z niezliczonych płaszczyzn możemy przenieść na iednę: ale kiedy linia krzywa tak leży na powierzchni, iż iey płaszczyzna przecinaiąca nie może zagarnąć, sposób dopiero wyłożony nie może służyć. Linii bowiem krzywey nie można poznać tylko przez zrównanie między dwiema odmiennemi ilościami, do którego nam łatwo było przyiśdź rachuiąc linią krzywą całą położoną na płaszczyznie przecinaiącey, gdzie trzy współ-uszykowane x, y, z, do powierzchni, potrafiliśmy za pomocą Trygonometryi wyrazić przez dwie t, u, do linii krzywey. Zastanówmy się z uwagą nad tą nową trudnością. Nie możemy poznać linii krzywey tylko przez zrównanie między dwiema współ-uszykowanemi; więc nam koniecznie potrzeba linią krzywą przenieść z niezliczonych płaszczyzn na iednę, i zrównanie na powierzchnią między x, y, z, przerobić na inne między dwiema tylko odmiennemi ilościami. A przeto trzeba nam koniecznie mieć dwa zrównania na powierzchnią, za pomocą których wyrzuciwszy iednę odmienną n.p. z, wypadnie zrównanie między x, y, na linią krzywą. Tu uważmy naprzód, że dwa te zrównania bydź powinny różne, więc każde wyrażać będzie inną powierzchnią; z nich nie możemy wyrzucać żadney ilości odmienney, ieżeli iey wartość nie będzie spólna obydwom powierzchniom, a przeto ieżeli współ-uszykowane iedney powierzchni nie będą do tey samey osi, i do tego samego początku odcinków odnoszone co i drugie; i ieżeli punkta iedney powierzchni nie znidą się s punktami drugiey, w linii krzywey szukaney: to iest, takiey linii krzywey nie możemy poznać, tylko przez przecięcie powierzchni od drugiey powierzchni takie, aby powierzchnia przecinaiąca przeszła przez wszystkie punkta linii szukaney. Iako więc linie krzywe leżące na iedney płaszczyznie, poznaiemy za pomocą

prze-

przecięcia powierzchni płaszczyzną; tak linie krzywe leżące na różnych płaszczyznach poznać możemy przez przecięcie powierzchni drugą powierzchnią. To zaś powtórne poznawanie dzieie się przez Eliminacyą; gdzie znowu widzemy podobieństwo teraźnieyszego sposobu s tym, któregośmy użyli na składnią zrównań pod §§. XVI. XVII. Przypomniymy sobie tamto działanie, abyśmy lepiey zrozumieli teraźnieysze. Od dwóch zrównań wyrażaiących dwie linie odnoszone do tey samey osi i do tego samego początku odcinków na punkta N, M, (fig. 45.) przyszliśmy do zrównania na punkta Q, P; więc tem wyrzucaniem iedney ilości odmienney, punkt N przenieśliśmy na punkt Q, punkt zaś M, na punkt P, przez pionowe NQ, MP, to iest punkta z iedney linii przenieśliśmy na drugą; podobnie i teraz maiąc dwa zrównania między $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$, (fig. 52), na dwie powierzchnie przecinaiące się, i te przerabiaiąc na iedno między y, x; punkt M przez pionową przenoszemy na punkt Q, i całą linią krzywą RMN, przenoszemy tym samym sposobem na SQT, czyli na płaszczyznę BAD; linia SQT nazywa się Rzutem, albo Przeniesieniem linii RMN. (*Projectio curvae*); a iako pod §. XVI. poznaliśmy oczywiście że nie zawsze pierwiastki rzetelne w zrównaniu oznaczonem pokazuią przecięcia, tak i tu trzeba nam pamiętać, że lubo zrównanie na rzut linii będzie mieć wartości rzetelne, i wyrażać prawdziwe linii krzywey przeniesienie; nie zawsze iednak z rzetelności rzutu należy wnosić o rzetelności linii na powierzchni ciała zostaiącey: bo do tego ieszcze należy się przekonać, że pionowe przenoszące linią s powierzchni na płaszczyznę, są także rzetelne; do czego pomóc nam powinny wszystkie rozumowania pod §. XVI. wyłożone. Pamiętaymy ieszcze i o tem, że odnosząc powierzchnią do trzech płaszczyzn głównych, możemy na którąkolwiek z nich cisnąć linią krzywą, co zawisło od ilości

Fig. 45.

Fig. 52.

odmienney którą wyrzucamy. Ieżeli z dwóch zrównań wyrzucamy z, otrzymuiąc inne między x, y; ciskamy na ten czas linią krzywą na płaszczyznę BAD: kiedy zaś wyrzucamy y, zostawuiąc z, x, ciskamy ią na płaszczyznę CAD: nakoniec ciskamy linią krzywą s powierzchni na płaszczyznę CAB, wyrzucaiąc x. A iako na ciskanie linii krzywych na płaszczyznę potrzebuiemy dwóch zrównań do powierzchni; tak też chcąc z rzutu poznać linią krzywą na powierzchni leżącą, ieden rzut nigdy nam nie wystarczy, ale ich trzeba koniecznie dwa: co oczywiście wypada s samey natury powierzchni, na którą potrzebuiemy zrównania między trzema odmiennemi ilościami. Weźmy za przykład kulę przeciętą od płaszczyzny pochyłey do gruntu, i szukaymy rzutu linii krzywey tem przecięciem zrodzoney. Mamy dwa zrównania na powierzchnią kuli - . $x^2+y^2+z^2=a^2$; i na powierzchnią płaską $Ax+By+Cz=D$; wyrzuciwszy z, otrzymamy zrównanie na rzut koła.

$$D^2-D^2a^2-2DBy-2ADx+(A^2+C^2)x^2+(B^2+C^2)y^2$$
$$+2Bxy=0.$$

które wyraża Ellipsę. Każde więc koło nachylone do iakiey płaszczyzny, i ciśnione na nię, wydaie Ellipsę; tak iako każda linia krzywa rzucona przez pionowe na tę samę płaszczyznę gdzie leży, daie linią prostą, czyli linia prosta iest zawsze rzutem linii krzywey, na tey samey płaszczyznie leżącey.

Tłómaczy się użycie ciskania ciał i linii na powierzchnią w sztuce rysunków.

Sztuka ta przenoszenia linii, z iedney płaszczyzny na drugą przez linie pionowe, będąc prawem dla oka naszego w wiedzeniu ciał odległych, zrodziła naukę osobną nazwaną *Perspektywa*, która iest gruntem rysunku i malarstwa. Oko nasze nie widzi ciał tylko przez linie proste, przez które światło się roschodzi: nie mogąc sądzić z oka o odległości rzeczy, wiemy tylko że ciało sprawuiące w nas czucie, znayduie się na linii prostey od siebie do oka prowadzoney, ale nie wiemy na którym punkcie tey

linii

linii leży: ieżeli to ciało ieſt niezmiernie od nás oddalone, i má cząſtki iedne mniey, drugie więcey od nás odległe; wſzyſtkie te różnice odległości przed okiem naſzym nikną, tak dalece że ie wſzyſtkie do iedney odległości odnoſzemy: i tak ciała Niebieſkie, iako to n.p. Xiężyc lub Słońce będąc okrągłe, i kuliſte, widzemy płaſkie; bo wſzyſtkie punkta ich powierzchni wypukłey, odnoſzemy przez linie pionowe do płaſzczyzny przez śrzodek ciała przechodzącey i pionowey na linią od śrzodka ciała do oka naſzego prowadzoną. Spoſób wyrażenia ciała tak, iak by ſię oku naſzemu pokázało, gdyby to s pewney iakiey odległości na nie patrzało, wypada s teoryi dopiero wyłożoney: i tak koło lub iakakolwiek liniá krzywá oddáloná od nás, ale położoná na tey ſamey płaſzczyznie z okiem, i do niego obwodem obróconá, widzianá będzie iak liniá proſtá; bo wſzyſtkie punkta iey obwodu oko odnoſić będzie do linii proſtey prowadzoney przez śrzodek linii krzywey, tak iak koło ukośnie od oka w wielkiey odległości widziane, zamieni ſię w Ellipſę. S tego prawa ſztuka ryſunku ciał rożnych zależy na tem; iż obierá ſię naprzód pewne położenie i mieyſce dla oka: między niem i ciałem kładzie ſię płaſzczyzna przeźroczyſtá, czyli Táblica; linie od ciała do oka prowadzone przechodzą przez tę płaſzczyznę, i gdzie każdá Tablicę przeciná, tám ieſt mieyſce punktu, s którego liniá wychodzi. Weźmy ſobie za przykład ſpoſób ryſowaniá Mápp, czyli kárt Geograficznych, gdzie ieſt cała kulá lub część powierzchni ziemi odmalowaná. Te kárty różne mieć mogą poſtaci podług różnego położenia oka względem kuli ziemſkiey. Ieżeli oko położemy w śrzódku ziemi, Táblica będzie dotykać ſię kuli, na którey ſię każdy punkt koła odmaluie tam, gdzie ſię kończy ſtyczna iego łuku; ſtyczne roſnąc znacznie, rościągną powierzchnią pół-kuli do odległości nieſkończoney; i dlá tego na takich kartach nie maluią ſię większe części powierzchni od 45°.

Aże oko znayduiąc się w środku, znayduie się razem na płaszczyznach wszystkich południków i kół większych; te koła rysuią się iak linie proste. Takowe położenie oka daie się w kartach kuli niebieskiey. *Powtóre* oko położyć możemy w biegunie kuli: Táblica na ten czás będzie w samym środniku, na którą ciska się cała powierzchnia pół kuli leżącą na stronie drugiego bieguna. Ponieważ w biegunach znowu się wszystkie Południki przecinaią, oko znayduie się na wszystkich tych płaszczyznach, przeto południki na takowych kartach wyrażaią się przez linie proste, koła zaś równoległe zostáwszy przy swoiey figurze rosną od bieguna tak, iako styczne łuków zabieraiących połowę szerokości geograficzney. Ciskanie takowe powierzchni kuli nazywa się BIEGUNOWEM *(Projectio polaris)*, tak iak pierwsze nazywa się SRZODKOWEM *(Projectio centralis)*. Użycie ciskania biegunowego ma mieysce w rysowaniu pół-kuli ziemskiey lub niebieskiey. Nakoniec położyć możemy oko na samey powierzchni kuli, Tablicę zaś na Horizoncie mieysca przechodzącym przez środek kuli. Koło to równo-legle gdzie się oko znayduie, wyraża się zawsze przez linią prostą; czego mámy przykład w dzisieyszych kartach ziemskich, kiedy połowę kuli na płaszczyznę południka ciskamy, położywszy oko w samym środniku. Dawni Geografowie rysuiąc nawet kráy iaki, obierali środnik na położenie oka; i dla tego ich karty wyrażały mieysca ziemi nadto ukośno i od podobieństwa dalekie. W dzisieyszych kartach chcąc rysować kráy iaki, bierze się mieysce między dwiema południkami i dwiema równo-ległemi kołami zawarte, gdzie się kray ten zamyka; z środka tego kraiu prowadzi się liniá prostá przez środek kuli aż na stronę przeciwległą, gdzie się oko znayduie patrzące na kráy przez Táblicę umieszczoną w środku kuli, i prostopadłą do linii prostey dopiero opisaney; południk tego mieysca środniego na przeciwko którému oko leży, będąc na iedney pła-

szczyznie

fzczyznie z okiem, zamienia fię na linią proftą, inne zaś południki wypadaiąc z przecięcia ukośnego kuli, fą porcyami Ellipfy: bo ogólnie mówiąc: wfzyftkie południki zboczne dla oka, kiedy fię to znayduie na powierzchni kuli, zamieniaią fię w Ellipfy, podług teoryi wyżey wyłożoney. Gdyby ta nauka ryfowania kart, nie była nad to rościągła i obca dla celu, któryśmy fobie założyli; weszlibyśmy we wfzyftkie iey fzczególności; ale ponieważ nam wypadnie w częściach Fizyczno-Matematycznych pokazać użycie tych ogólnych początków rachunku, któreśmy w tem dziele rzucili, znaydziemy tam przyzwoitfze mieyfce dla materyi teraz wfpomnioney.

ROZDZIAŁ SZOSTY.

O właśnościach linii krzywych Przestępnych i ich znakomitfzych gatunkach.

§. XXXI.

Linie krzywe będąc całkiem zawiſłe od funkcyi w ich zrównania wchodzących, mieć powinny naprzód ten fam podział, który fłuży funkcyom, i takie właśności, iakich w zrównaniach ich, funkcye wyciągaią. We wfzyftkich dotąd uwagach nafzych fame zrównania i funkcye Algebraiczne były zrzodłem wyłożonych właśności na linie krzywe: gdzie fama natura Rozciągłości *(Extenfio)* położyła granice badaniom nafzym; ponieważ ftanąć mufieliśmy na zrównaniach nieoznaczonych między trzema odmiennemi ilościami, dla tego, że każda z nich potrzebuiąc innego wymiaru, nie mamy w naturze więcey wymiarów nad trzy, które wfpół-ufzykowane zabrały. Zoftaie nam ieszcze poznać linie krzywe wyrazone zrównaniem, w które funkcye przeftępne wchodzą. Dwa fą rodzaie funkcyi przeftępnych, któreśmy w

drugiéy części wyłożyli, to ieſt Logarytmy i Łuki kół. Każdy z nich má tę ogólną cechę, że do rozwiązaniá zrównaniá takową funkcyą zawiéraiącégo, potrzebuiémy działáń cale różnych od działań algebraicznych; że wártości czyli piérwiáſtki takowych zrównáń zawiſły iſtotnie od ſzeregów nieſkończonych których zrównaniém algebraicznem ogarnąć nie podobná. Tén oſtatni charakter ieſt iſtotniéyſzy od piérwſzégo, bo do funkcyi algebraicznych możémy działáń użyć przeſtępnych, któré cale natury funkcyi nie zamiénią. Wſzakże Teorya granic w Rozd. III. wyłożoná, ieſt działaniém przeſtępnym; która przecie ani zrównáń ani linii krzywych tám wyłożonych nie uczyniła przeſtępnémi: i cała Matematyka wyżſzá używaiąc takowych działáń na funkcye nawet Algebraiczné, wzięła imie Geometryi przeſtępnéy, lubo funkcye takowémi działaniami w ſwéy naturze zoſtawiá nienaruſzoné co do teraźniéyſzégo podziału.

Wſzyſtkié funkcye maiącé albo ilość odmienną, albo niewymierną rzetelną za wykładnika, zawiſły od Logarytmów; tak, iak funkcye z wykładnikami uroionémi zawiſły od łuków koła: piérwſzé wyráżaią ſię zrównaniém $y=a^x$ albo ogólniéy $y=Aa^{x:f}$; drugie zrównaniém $y=Ł.Wſt.x$ albo $y=Ł.Doſt.x$, albo $y=Ł.Wſt.l.x$, gdzie $Ł$ znaczy łuk koła, $l.$ logarytm, podług §§. 48. 51. Alg. Mogą ieſzcze znaydować ſię zrównaniá inné przeſtępné, których przez Algebrę nie bylibyśmy w ſtanie poznać, i dlá tego ié do inney nauki odkładámy. Uważmy náprzód iakié właſności miéć powinna liniá krzywá wyrażoná zrównaniém $y=a^x$. Nadaiąc ciągle x wártości dodatné, y rośnie, i nigdy nie przeſtaie bydź dodatném i rzetelném; kładąc znowu za x, wſzyſtkié wártości odiemné cáłkié, y coráz barziéy ubywá, ale nie przeſtaie bydź ieſzcze rzetelném i odmiennem, to ieſt:

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ---m----$$

na

$$y=1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ ---a^m\ ---$$

—1,

$-1, -2, -3, -4 \;-\; - \;-m$

$\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4} \;-\; \frac{1}{a^m}$.

więc liniá krzywá wyrażoná zrównaniém $y=a^x$ z iednéy ftrony początku odcinków *A* na fig. 53, powinna rofnąć w przyftawach bez końca; z drugiéy ftrony powinna bez końca ubywać: a przeto oś *QC*, ieft iéy ledwo-nieftyczną. Cáłá zaś ta liniá leżyć będzie nad osią, gdzie miéyfcé przyftáw dodatnych przypádá. Kiedy *x* równie rośnie lub ubywá, przyftawy fobie przyległé maią tén fám nieodmiénný ftófunek, i kiedy odcinki wzráftaią lub ubywaią przez poftęp Arytmetyczny, przyftawy rofną lub ubywaią przez poftęp Geometryczny: a przeto odcinki fą logarytmami przyftáw; każdá przyftawa ieft śrzednią proporcyonalną między dwiema odcinkami iéy przyległémi, i równo od niéy odległémi. Liniá krzywá na fig. 53. tém ieft náprzód znakomitá, że maiąc iednę ledwo-nieftyczną, má tylko iednę niefkończoną odnogę: kiedy w liniách Algebraicznych każdá ledwo-nieftyczná miała dwie odnogi bez końca fię ciągnącé. Tu widzémy oczywiście, że na przyftawę zero, odpowiada odcinek niefkończony odiemny; tak iak na przyftawę niefkończoną dodatną, odcinek niefkończony dodatny; i z iednéy ftrony liniá krzywá zbliżá fię do ofi, z drugiéy ftrony od niéy fię bez końca oddálá. Aże podług wyłożonych dopiéro włáfności $AP=log.PM=log.(1.PM)=log.1+log.PM$: dowiedliśmy zaś pod §. 55. Algeb. że iedność má niefkończoną liczbę logarytmów, s których tylko ieden o ieft rzetelny, a wfzyftkié uroioné; więc każdemu odcinkowi będzie odpowiadać niefkończoná liczba przyftáw, s których iedna ieft tylko rzetelná, a wfzyftkié inné uroioné: to ieft, liniá krzywá nie będzie tylko w iednem miéyfcu od przyftawy przeciętą. Ieżeli iednak za *x* brać będziémy ułomki z mianownikami párzyftémi n.p. $x=\frac{3}{2}$, będzie

Fig. 53.

M5 $y=\sqrt{a^3}$;

$y=\sqrt{a^3}$; znak pierwiaſtkowy maiąc koniecznie dwa znaki ± do ſiebie przywiązane, pokazuie ieſteſtwo przyſtáw w linii krzywéy pod osią *PQ*, té atoli dwoiſté przyſtawy nie wypádaiąc na każdą wártość *x*, nie uczynią pod *PQ* odnogi ciągłéy, ale tylko zoſtawią punkta oderwané pod osią. Będzie więc liniá krzywá miáła znaczną liczbę punktów pod *CQ* od ſiebie cale oddzielnych i oderwanych, które żadnégo łuku ciągłégo linii krzywéy nie złożą: co ieſt znowu ſzczególnieyſzą właſnością, iakieyśmy w żadnéy linii Algebraicznéy nie doſtrzegli.

Chcąc prowadzić ſtyczną do iakiégokolwiek punktu *M* tey linii krzywéy, potrzebá nám znaleśdź podſtyczną *PT*, użyimy do tego ſpoſobu podanégo w §. XXI: w zrównanié naprzód na linią krzywą $y=a^x$ czyli $log.y=x.log.a$, położmy *p* za *x*, *q* za *y*; otrzymámy $l.q=p.log.a$: powtóre $x=p+t$, $y=q+u$; wypadnie $l.(q+u)=(p+t)l.a$ - - $l.(q+u)-l.q=(p+t)l.a$ $-p.l.a$, czyli $l.(\frac{q+u}{q}) = t.l.a$; $1+\frac{u}{q}=a^t$. Aże dowiedliśmy w Algebrze pod §. 49. w zrównaniu *(A)*, że $a^t=1+kt+\frac{k^2t^2}{1.2}+\frac{k^3t^3}{1.2.3}+$ i t.d. więc $\frac{u}{q}=kt+$ $\frac{k^2t^2}{1.2}+\frac{k^3t^3}{1.2.3}+$ i t. d. - - - - (ψ). odrzuciwſzy wſzyſtkie potęgi wyżſzé *t*, i porównawſzy (ψ) z (λ) w §. XXI; mámy $A=k$, $B=-\frac{1}{q}$, $PT=-\frac{Bq}{A}=\frac{1}{k}$; aże $\frac{1}{k}$ w §. 49. Alg. ieſt liczbą nazwaną *zamiennikiém*, ſłużącą do przerobieniá logarytmów iednégo układu na drugi; więc w linii krzywéy teraźnieyſzéy, którą nazywaią LOGARYTMICZNĄ *(Curva Logarithmica)* Podſtyczna ieſt linią nieodmienną, równą właśnie téy liczbie, od którey każdy układ Logarytmów zależy. I tak podſtyczná w Logarytmach

garytmach Briggiuſza ieſt *0, 4342944819* i t.d. w Logarytmach zaś hyperbolicznych taż podſtyczná równá ieſt iedności. I tać to ieſt náygłówniéyſzá włáſność linii Logarytmiczné́y: że w niéy podſtyczná będąc nieodmienną, ieſt razem LINIĄ RÓWNANIA *(Perameter)* iednégo układu Logarytmów z drugim.

§. XXXII.

Drugi rodzáy linii krzywych przeſtępnych zawiſł od łuków koła: na który obierzmy ſobie za przykład zrównanié náyprościéyſzé $y=mŁ.Wſt.x$, gdzie przyſtawa ieſt proporcyonalná łukowi maiącému $Wſt.x$; ażeli wiémy z §. 52. Algebry, że $Wſt.x$ má nieſkończoną liczbę łuków do których náleży, będzie także y miało nieſkończoną liczbę wártości, i liniá krzywá takiém zrównaniém opiſaná będzié w nieſkończonéy liczbie punktów przeciętą od linii proſtéy. Niech będzie u náymniéyſzy takowy łuk, którégo wſtáwa x, P niech wyrážá pół-obwodu koła; wiémy z §. 52. Algebry że do wſtawy x należą łuki. **Linie krzywé przeſtępné zawisłé od łuków koła.**

$$u,\ P-u,\ 2P+u,\ 3P-u,\ 4P+u,\ 5P-u\ \text{- - -}$$
$$-P-u,\ -2P+u,\ -3P-u,\ -4P+u,\ +\ \text{i t. d. - - -}$$
$$2nP+u,\quad (2n+1)P-u$$
$$-2nP+u\quad -(2n+1)P-u$$

Przypátrzmy ſię ſkładni takiégo zrównaniá, s którégo mámy proporcyą; $1:m=Ł.Wſt.x:y$, to ieſt odryſowáwſzy koło na fig. 54. którégo promień $AB=1$, i wziawſzy $AP=x$, będzie $EF=Ł.Wſt.x$, będzie $1:m=EF:PM$, ale oprócz tego będą proporcye $1:m=P-EF:PM'$ - - $1:m=2P+EF:PM''$ i t. d. to ſamo wypadnie nám na przeciwnéy ſtronie śrzednicy BC, i liniá krzywá opiſaná zrównaniem $y=m.Ł.Wſt.x$ rościągnie ſię w nieſkończoną odległość z obydwóch ſtron śrzednicy BC, i przyſtawa y mieć będzie wártości bez końca: każdá więc liniá proſtá równo-ległá linii BC, będzie śrzednicą linii krzywéy; co ieſt właſnością ſzczególnie liniom krzywym przeſtępnym ſłużącą. To cośmy dopiéro widzieli na linią krzywą **Fig. 54.**

zamkniętą w zrównaniu $y=m.Ł.Wſt.x$, służy na linią krzywą $y=m.Ł.Doſt.x$, $y=m.Ł.Sty.x$, $y=m.Ł.Siec.x$ i t.d. położywszy bowiem $x=\frac{1}{2}P-z$, będzie $Wſt.x=Doſt.z$, $y=m.Ł.Doſt.z$, które iest tego samego wzoru co $y=m.Ł.Wſt.x$. Wszystkie zaś inne linie Trygonometryczne są funkcyami Wſtáw i Doſtáw.

Do tego rodzaiu należą linie krzywe, które nazwano Kołowe (*Cycloides, Trochoides*), i linie Slimakowe (*Spirales*): pierwsze maią swoie nazwisko od koła będąc opisane od punktu na iego obwodzie położonego: drugie od swey figury podobney do skorupy ślimaka. Własności takowych linii krzywych są barzo rozległego w Mechanice użyciá, do których wyłożeniá potrzebuiemy wyższey teoryi nad tę, którą nám Algebra tłómaczy. Oprócz tego rozmaite gatunki tych linii krzywych wypádaią z różnego prawa biegu, które punktowi opisuiącemu nadaiemy, a przeto podpádać iesźcze nie mogą w tem dziele naszym uwágom. Zebyśmy sobie iednak potrafili wystawić obráz takowego rodzaiu linii namieniemy przynáymniey o nich, ile nám teraźnieysze pozwolą początki. Fig. 55. Wystáwmy sobie na fig. 55. że koło CMB toczy się po linii prostey BP', w tym obrocie punkt A śrzednicy przedłużoney, kiedy ta zostanie nieodmienną, opisze linią krzywą AFA', którą nazwano Kołową (*Cyclois*), iakaż będzie natura tey linii? Widziemy oczywiście że obwód koła tocząc się po linii prostey BP' rozwinie się na nię, czyli obwód koła będzie równy całey linii prostey prowadzoney od B aż do tego punktu, gdzie po obrocie skończonym punkt B powtórnie padnie na BP', i każdy łuk koła równy będzie tey części, po którey się przetoczył. Ieżeli więc łuk $B'G$ przetoczył się przez linią BG, nazwáwszy łuk $B'G$, z; będzie $z=BG$, aże ten łuk iest miarą kąta $B'S'G$, więc kąt $B'S'G=\frac{z}{a}$; gdzie a wyráżá promień $S'G=SB$, przeto kąt $GS'A'=180^\circ-\frac{z}{a}$;

$-\frac{z}{a}$; nazwiymy $S'A'=SA=b$, będzie $A'Q=b.Wſt.\frac{z}{a}$, $S'Q=-b.Doſt.\frac{z}{a}$, $AP=x$, $PA=y$, mámy $y=z+bWſt.\frac{z}{a}$, $x=b-b.Doſt.\frac{z}{a}$, czyli $b.Doſt\frac{z}{a}=b-x$, potrzeba nám za pomocą oſtatniégo zrównaniá wyrazić z przez x, abyśmy y wyrazili przez x: $Doſt.\frac{z}{a}=1-\frac{x}{b}$ - - więc $Wſt.\frac{z}{a}=\frac{\sqrt{(2bx-x^2)}}{b}$, a przeto $z=a.Ł.Wſt.\frac{\sqrt{(2bx-x^2)}}{b}$, włożywſzy té wártości w zrównanié $y=z+b.Wſt.\frac{z}{a}$; otrzymámy na linią kołową:

$$y=\sqrt{(2bx-x^2)}+a.Ł.Wſt.\frac{\sqrt{(2bx-x^2)}}{b} \quad - - (\alpha).$$

albo rachuiąc odcinki od śrzodka S, i biorąc $t=b-x$, $b^2-t^2=2bx-x^2$.

$$y=\sqrt{(b^2-t^2)}+a.Ł.Doſt.\frac{t}{b} \quad - - - (\beta).$$

ponieważ $Doſt.\frac{t}{b}$ ma nieſkończoną liczbę łuków; y má nieſkończoną liczbę wártości, któré ſobie łatwo wyobrażémy, uważaiąc linią proſtą BP' pociągnioną w odległość nieſkończoną, i po niéy toczącé ſię bez końca koło CMB, któré opiſze ſwym obrotem nieſkończoną liczbę Cykloid ſobie przyległych, zamkniętą w zrównaniu (β). Ieżeli położemy $b=a$, iuż nie punkt A, ale punkt C będzie punktem opiſuiącym, ſkąd wypadnie liniá kołowá krótſzá. Różné gatunki téy linii krzywéy wyniknąć mogą z różnéy wielkości linii SA, albo z różnégo obrotu koła CMB, któré ſię nazywá KOŁEM RODZĄCYM (*Circulus generator*),

rator), tocząc n.p. koło po obwodzie innego koła, albo po odnodze inney iakiey linii krzywey, otrzymamy różne figury linii krzywey ztąd zrodzoney, których uwaga, że iest nadto zawikłana dla rachunku algebraicznego, odkładamy ią do Mechaniki, gdzie nam się pokaże użycie iey w zegarach. Przystąpmy iuż do uważania drugiego rodzaiu linii przestępnych zawisłych od łuków koła.

Fig. 56. Na fig. 56. pomyślmy sobie, że punkt *B* promienia *SB* obraca się około środka *S* biegiem iednostaynym, i opisuie obwód koła *BANB*, kiedy zaś promień *SB* zaczyna taki obrot, wystawmy sobie, że w tym samym czasie punkt ruchomy z środka *S* bieży po promieniu *SB*, s taką samą chyżością, z iaką się promień opisuiący obwód koła obraca; i kiedy punkt *B* opisze obwód koła, punkt wychodzący z środka *S* przeydzie przez promień cały *SB*, w tym dwoiakim biegu punkt wychodzący z środka opisze linią krzywą *SMB*, którą nazwano Slimakową Archimedesa *(Spiralis Archimedea)*, dla tego, że ią Archimedes naprzód w osobney xiążce uważał. Ponieważ w tym samym czasie punkt środkowy obieży promień, kiedy punkt *B* obieży obwód koła; przypuśćmy że punkt środkowy przebiegł linią *SM*, kiedy punkt *B* opisał łuk *BAN*, nazwawszy $SM = z$, $SB = a$, łuk $BAN = s$, obwód cały koła $= P'a$; będzie - - $a:z = P'a:s$, czyli $s = P'z$, zrównanie na linią ślimakową. W niem $z = SM$, iest funkcyą łuku s, czyli kąta tym łukiem zawartego; aże bydź może nieskończona liczba kątów odpowiadaiących temu samemu położeniu linii *SM* względem *AB*; z ma nieskończoną liczbę wartości, i linia ślimakowa ma nieskończoną liczbę zakrętów i wirów, w których się rościąga z obydwóch stron środka bez końca. Wprowadzaiąc różne stosunki między chyżością punktu bieżącego po promieniu, i chyżością punktu idącego po obwodzie koła, wypadną różne wzory zrównań wyrażaiące różne gatunki linii ślimakowych, które

będziemy

będziémy dopiéro w ſtanie w wyżſzych Matematyki częściach uważać. Tu łatwo nám poznać przyczynę dla czego linie krzywé przeſtępné nazwano mechanicznémi: wyciągaią ſię bowiem ich własności s práw biegu punktowi opiſuiącému nadanych, które raczéy do Mechaniki niż do Geometryi náleżą.

Krótki wykład całégo dzieła, s którégo ſię opis Algebry wyciąga.

Uczyńmy ſobie teraz obráz ogólny całéy nauki z łańcucha práwd w tém dziele przebieżonych. Uważaiąc ſpoſób poznáwaniá umyſłowi naſzému zoſtawiony, i tén do natury ilości ſtóſuiąc, trafiliśmy na ięzyk proſty i ogólny do wyrażaniá różnych ſtanów i związków ilości. Aże té związki wypádaią s pewnych ſtóſunków rzeczy, które rozum doſtrzégá; weſzliśmy w poznanié ogólné zagadnień, które ſię mogą uwádze naſzéy nadarzyć, i w poznanié potrzéb rozumu do rozwiązaniá takowych zagadnień; a znoſząc pierwſzé z drugiémi, odkryliśmy naygłowniéyſzy podział zrównań na oznaczoné, i nieoznaczoné. Widzieliśmy, że pierwſzé ſą wyſtárczaiącé do odkryciá prawdy, byleby znaleśdź prawidła na oddzielenié rzeczy nieznanéy zawikłanéy między znané, s którémi ſię w zrównaniu wiąże: ſzukaliśmy takowych prawideł, łącząc razém uwagę różnych wyrazów ilości, czyli funkcyi wchodzących w takowé zrównaniá i onym różné nadaiących nazwiſka. I to było rzeczą pierwſzégo Tomu.

Zrównaniá nieoznaczoné wyrážaiąc wártości wielu nieznanych od ſiebie ſpólnie zawiſłych, poddały nám ſpoſób poznawániá odmian iednych ilości przez odmianę drugich, i zrodziły całą Geometryą linii krzywych. Biorąc iednę s takowych odmiénnych ilości za główną, przywodziliśmy zrównaniá niby do rodzaiu oznaczonych, gdzie nám łatwo było ogólné prawidła w pierwſzym Tomie wyłożoné ſtóſować do zrównań teraźniéyſzych, i z nich wyciągać linii krzywych własności i podziáły. Uważaiąc wſzyſtkié odmiany zachodzić mogące w ilościach, doſtrzegliśmy, że té odmiany kończyć ſię mogą, albo téż ciągnąć

gnąć bezprzestannie: ten ostatni rodzáy odmiány skázáł nám pewne granice, do których się ilości wzrástaiąc lub ubywaiąc zbliżaią, a w niektórych przykładach linii krzywych naprowadził nás na pierwsze początki całey Matematyki wyższey. RACHUNEK więc ALGEBRAICZNY *iest ięzyk rozumowáń o różnych stanach, związkach, i odmianach skończonych, ilości.* Potrzebá nám ieszcze innego ięzyka do wyrażaniá rozumowáń na odmiany ilości w swoich granicach: i takiem iest Rachunek Dyfferencyalny i Integralny, do ktoregośmy iuż krok w tym Tomie uczynili.

KONIEC DRUGIEGO TOMU.



WYPIS

WYPIS

Materyi w drugim Tomie zawartych.

ROZDZIAŁ I.

Ilości i funkcye w zrównanié iakiégokolwiek stopnia wchodzącé wyrážaią się przez linie geometryczné: z różnych odmián tym ilościom lub funkcyom nadanych, tłómaczą się odmiany, które odpowiadaią liniom.

ROZDZIAŁ II.

Z uwág ogólnych nad zrównaniém 2go stopnia tłómaczą się właśności linii krzywych 2go porządku: wyciagaią się potém s szczególnych kondycyi gatunki tychże linii.

N §. 9.

ROZDZIAŁ III.

Ilośći odmienné zrównaniá nieoznaczonégo odnoſzą ſię do oſtatnich granic ſwego wzroſtu lub ubywaniá: s piérwſzych granic tłómaczy ſię ſpoſób poznáwaniá odnóg nieſkończonych i równaniá iednych linii krzywych z drugiémi; i z drugich granic wyciągaią ſię właſnośći odnóg ſkończonych, i ſpoſób równaniá wſzyſtkich linii krzywych s kołém.

§. 18.

ROZDZIAŁ IV.

ROZDZIAŁ V.

Tłómaczą ſię powiérzchnie ciáł przez zrównaniá nieoznaczoné między trzema odmiennémi ilościami.

Linie

ROZDZIAŁ VI.

Wláſności linii krzywych Przestępnych i ich znakomitſzé gatunki.

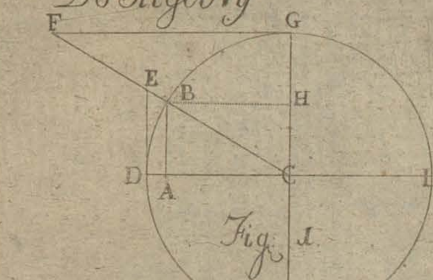


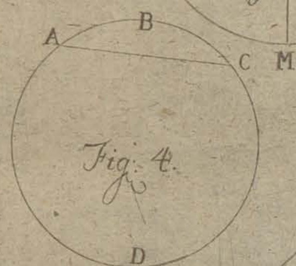


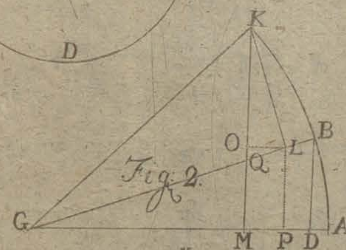
Do Algebry

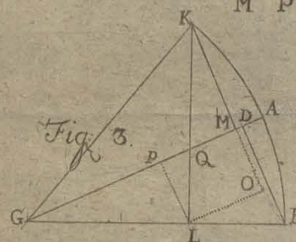
Do Geometryi Wyższéy

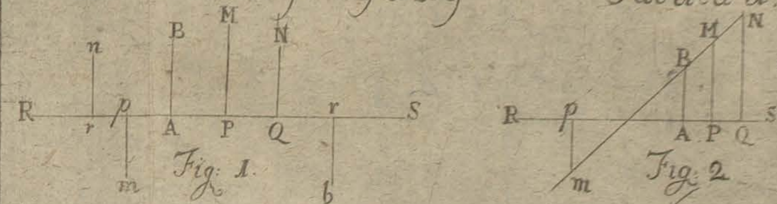
Tablica I.

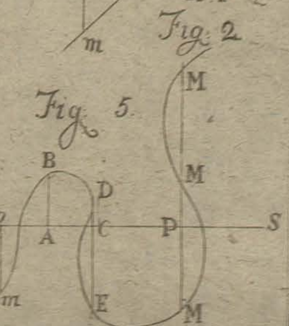


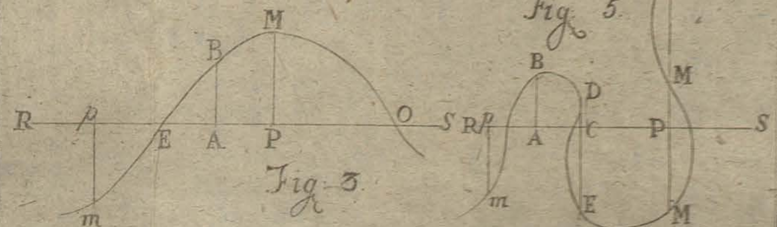


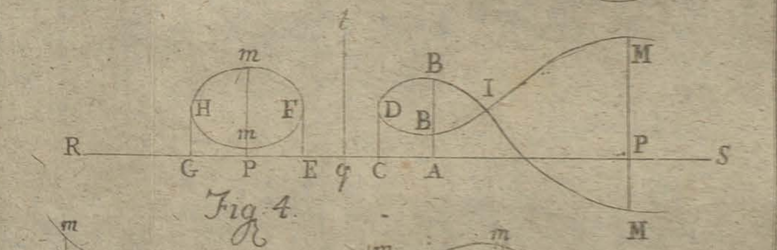


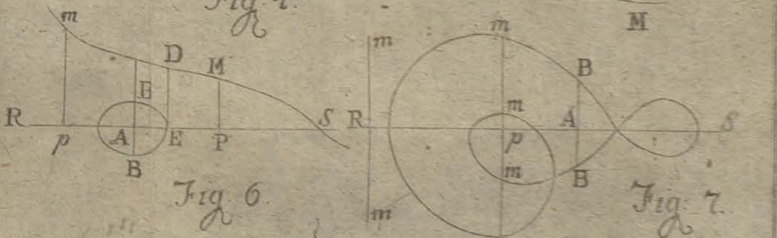




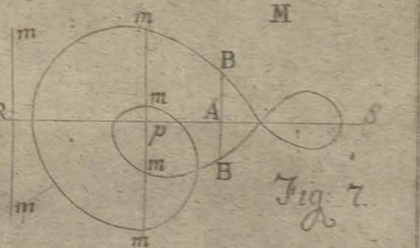


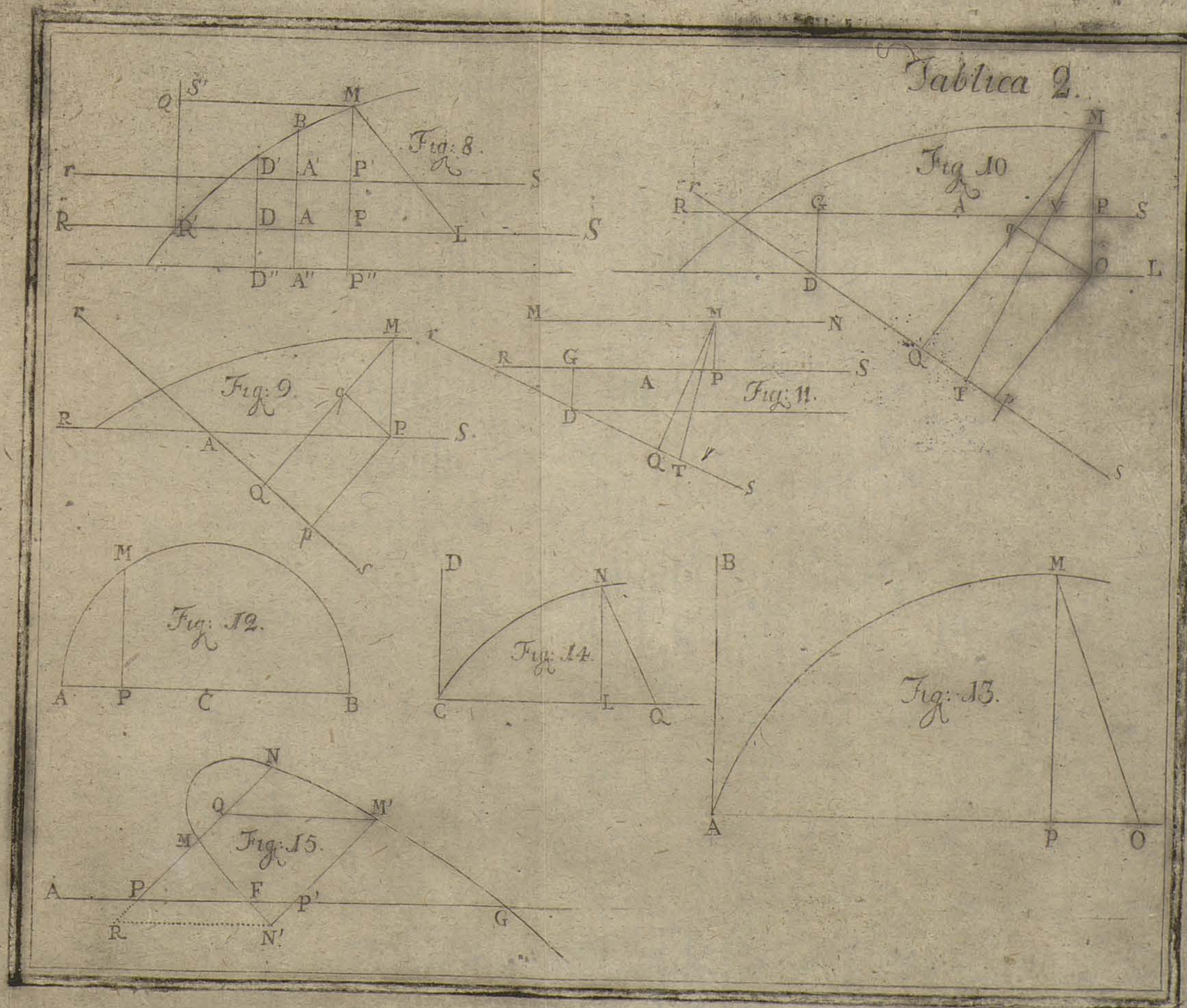




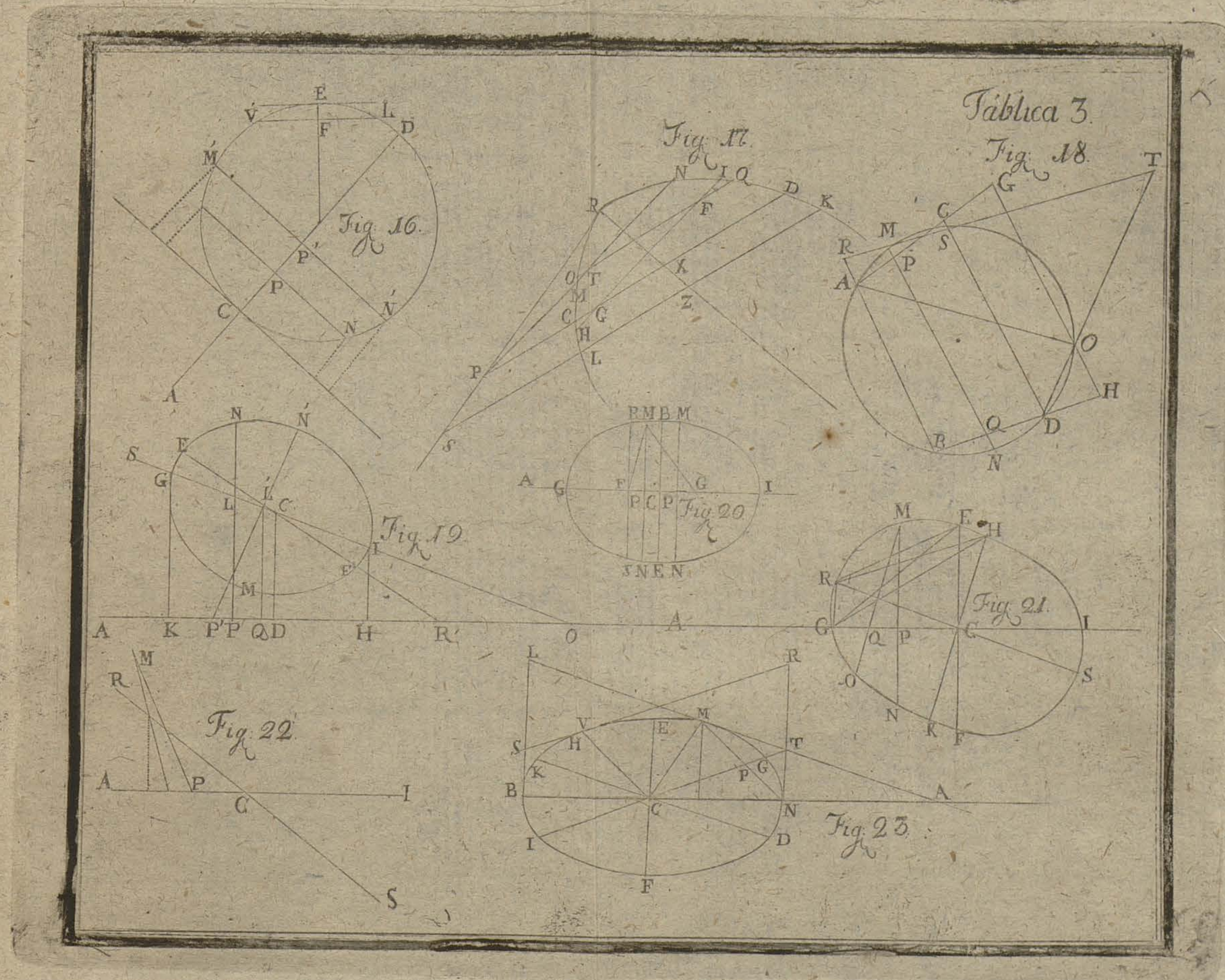




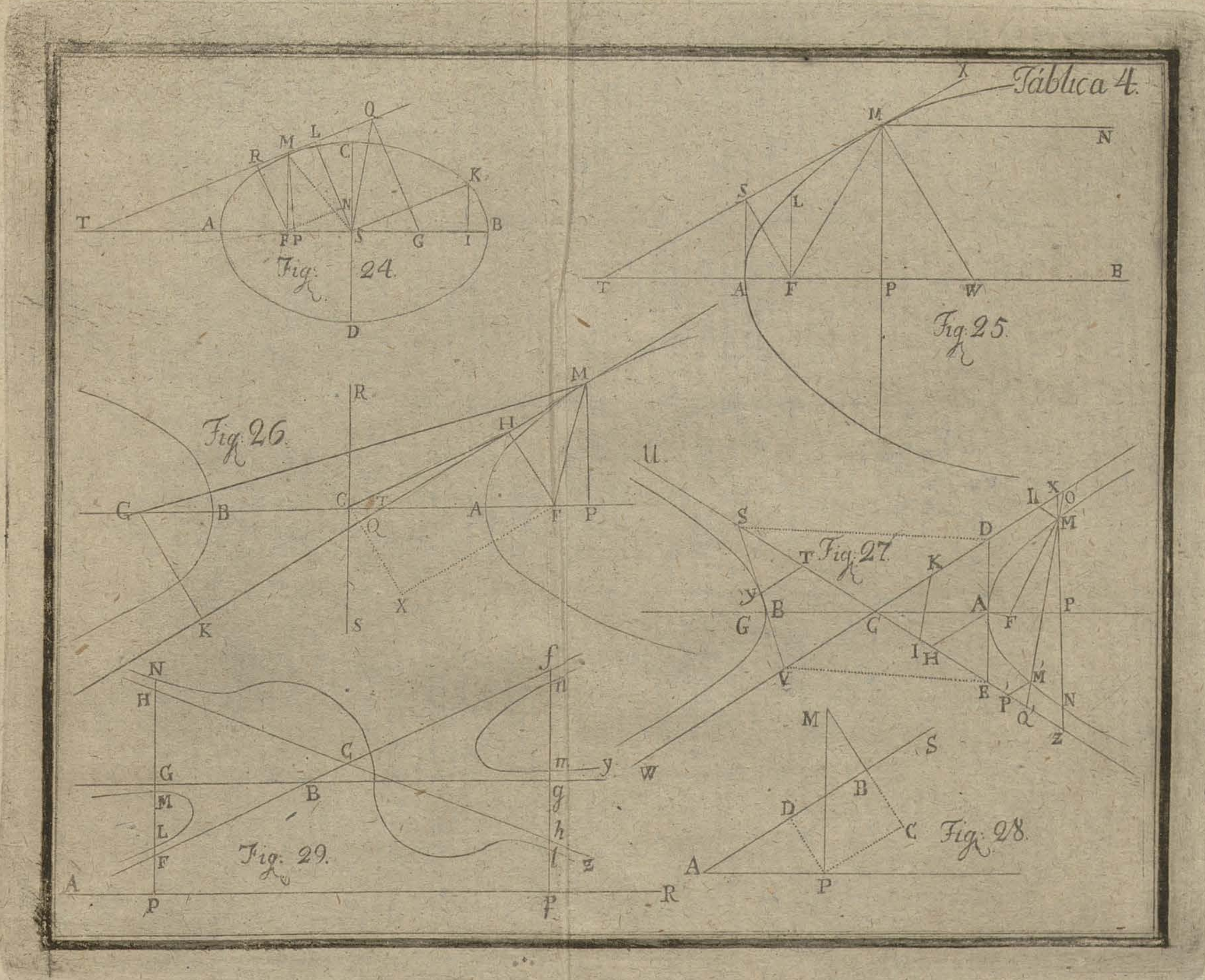




Tablica 2.
Fig: 8.
Fig: 9.
Fig: 10.
Fig: 11.
Fig: 12.
Fig: 13.
Fig: 14.
Fig: 15.



Tablica 3.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.


Tablica 4.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.

Táblica 5

Fig. 30

Fig. 31

Fig. 32 Nº 1º

Fig. 32 Nº 2do

Fig. 33

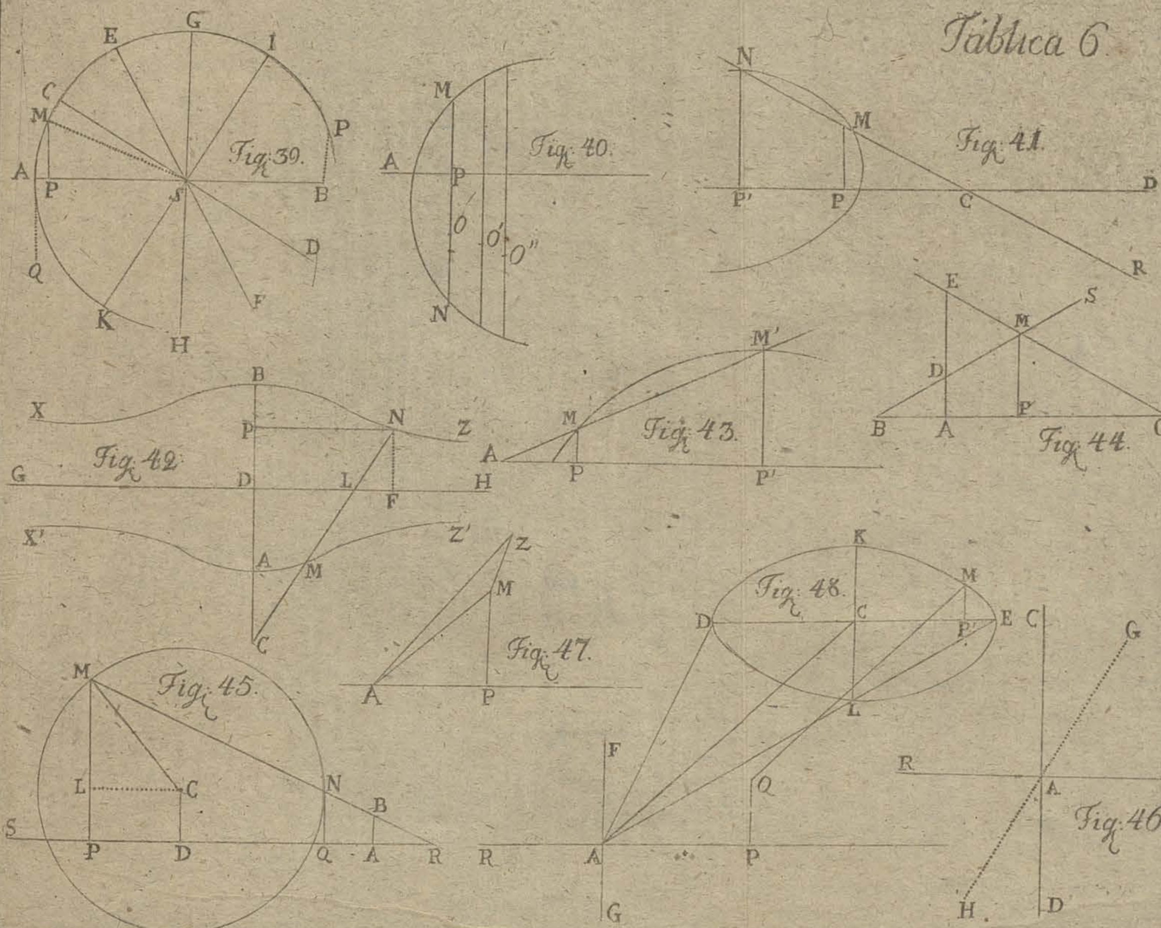
Fig. 34

Fig. 35

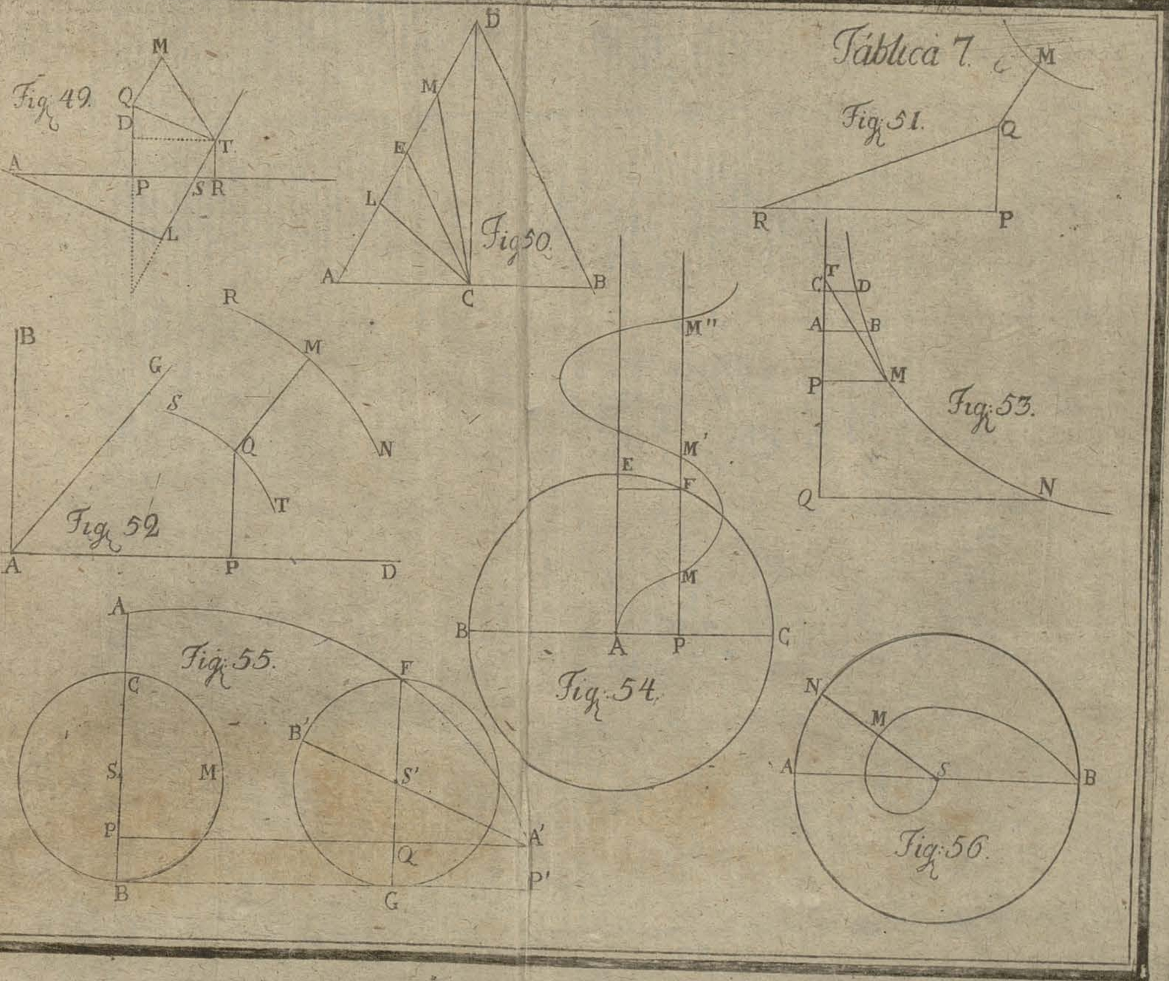
Fig. 36

Fig. 37

Fig. 38


Tablica 6.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.


BIBLIOTHECA
UNIV. IAGELL.
CRACOVIENSIS


Tablica 7.
Fig. 49.
M
Q
D
T
A
P
S
R
L
Fig. 50.
D
M
E
L
A
C
B
Fig. 51.
M
Q
R
P
B
G
S
R
M
Q
N
T
Fig. 52.
A
P
D
M''
M'
E
F
M
B
A
P
C
Fig. 54.
C
D
A
B
P
M
Fig. 53.
Q
N
A
Fig. 55.
F
C
B'
S
M
S'
P
A'
Q
B
G
P'
N
M
A
S
B
Fig. 56.




Biblioteka Jagiellońska
stdr0009662

